第二章　导数及其应用

§1　平均变化率与瞬时变化率

1.1　平均变化率+

1.2　瞬时变化率

对点上分

1. D

思路导引　利用物体在 t_0 到 $t_0+\Delta t$ 这段时间内的平均速度公式 $\frac{\Delta S}{\Delta t}=\frac{S(t_0+\Delta t)-S(t_0)}{\Delta t}$ 即可求得从 $t=1$ s 到 $t=3$ s 这两秒内的平均速度.

【解析】从 $t=1$ s 到 $t=3$ s 这两秒内的平均速度为 $\frac{S(3)-S(1)}{3-1}=\frac{-\frac{2}{3}+2}{2}=\frac{2}{3}$(m/s). **故选 D.**

2. C　【解析】由平均变化率定义得所求平均变化率为 $\frac{f(\pi)-f(0)}{\pi-0}=\frac{\pi^2}{\pi}=\pi$. **故选 C.**

3. C　【解析】记 $v_1=\frac{\Delta y_1}{\Delta x_1}=\tan\ \alpha_1$, $v_2=\frac{\Delta y_2}{\Delta x_2}=\tan\ \alpha_2$, 由题图易知 $\alpha_1<\alpha_2$, 所以 $v_1<v_2$. **故选 C.**

4. x^2+x(答案不唯一)　【解析】设 $f(x)=ax^2+bx+c\ (a\neq 0)$, 则 $\frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{1+\Delta x-1}=\frac{a(1+\Delta x)^2+b(1+\Delta x)+c-(a+b+c)}{\Delta x}=a\Delta x+2a+b=3+\Delta x$, 则 $\begin{cases}a=1,\\2a+b=3,\end{cases}$ 解得

$\begin{cases}a=1,\\b=1,\end{cases}$ c 可以取任意实数,故 $f(x)=x^2+x$(答案不唯一).

5. C 【解析】$\frac{\Delta y}{\Delta t}=\frac{y(2+\Delta t)-y(2)}{\Delta t}=\frac{4+4\Delta t+(\Delta t)^2+8+4\Delta t-12}{\Delta t}=8+\Delta t$,

所以 $\lim\limits_{\Delta t\to0}\frac{\Delta y}{\Delta t}=\lim\limits_{\Delta t\to0}(8+\Delta t)=8$,

所以物体在 $t=2$ s 时的瞬时速度为 8 m/s. **故选** C.

6. C 【解析】因为 $S(r)=4\pi r^2$,所以 $\frac{\Delta S}{\Delta r}=\frac{4\pi\left(\frac{1}{\pi}+\Delta r\right)^2-4\pi\cdot\left(\frac{1}{\pi}\right)^2}{\Delta r}=\frac{8\Delta r+4\pi(\Delta r)^2}{\Delta r}=8+4\pi\Delta r$,当 Δr 趋于 0 时,$\frac{\Delta S}{\Delta r}$趋于 8,所以当 $r=\frac{1}{\pi}$时,$S(r)$的瞬时变化率为 8. **故选** C.

7. C 【解析】在 0 到 t_0 范围内,甲、乙的平均速度都是$\frac{S_0}{t_0}$,**故** A,B **错误**;

因为甲对应的曲线在 $t=t_0$ 处的切线的斜率大于乙对应的曲线在 $t=t_0$ 处的切线的斜率,所以在 $t=t_0$ 处,甲的瞬时速度大于乙的瞬时速度,**故** C **正确**,D **错误**. **故选** C.

§2 导数的概念及其几何意义

2.1 导数的概念+

2.2 导数的几何意义

对点上分

1. C 【解析】因为 $\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}=\frac{\frac{1}{a+\Delta x}-\frac{1}{a}}{\Delta x}=\frac{-\Delta x}{a(a+\Delta x)\Delta x}=\frac{-1}{a(a+\Delta x)}$,

所以 $f'(a)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{-1}{a(a+\Delta x)}=-\dfrac{1}{a^2}$，故选 C.

2. D 【解析】根据题设，$f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{4(x+\Delta x)^2-4x^2}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}(8x+4\Delta x)=8x$，所以鱼竿在 $x=4$ m 处的线密度 $f'(4)=8\times 4=32(\text{g/m})$.

故选 D.

3. ABD 【解析】对于 A：

$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0-\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$

$=-\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+(-\Delta x))-f(x_0)}{-\Delta x}$

$=-f'(x_0)=-2$，故 A 正确；

对于 B：$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+3\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$

$=3\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+(3\Delta x))-f(x_0)}{3\Delta x}$

$=3f'(x_0)=3$，

解得 $f'(x_0)=1$，

故 B 正确；

对于 C：由题可知，$m\neq 0$，

$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0)-f(x_0+m\Delta x)}{2\Delta x}$

$=-\dfrac{m}{2}\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+(m\Delta x))-f(x_0)}{m\Delta x}$

$=-\dfrac{m}{2}\cdot f'(x_0)=-\dfrac{m}{2}\times 1=\dfrac{1}{2}$，

解得 $m=-1$，

故 C 错误；

对于 D：$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0-\Delta x)}{\Delta x}$

$=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)+f(x_0)-f(x_0-\Delta x)}{\Delta x}$

$=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}+$

$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+(-\Delta x))-f(x_0)}{-\Delta x}$

$=2f'(x_0)=2\times(-2)$

$=-4$，故 D 正确.

故选 ABD.

一题多解 对于选项 D,

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0-\Delta x)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\left[2\times\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0-\Delta x)}{2\Delta x}\right]$$

$$=2\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0-\Delta x)}{2\Delta x}$$

$=2f'(x_0)=-4$.

易错警示 用导数定义解决导数概念的变式问题,一定要从本质上理解变化量"Δx""Δy",否则容易出错. 一题多解中 x 的变化量为 $(x_0+\Delta x)-(x_0-\Delta x)=2\Delta x$,通过变形得到原式 $=2\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0-\Delta x)}{2\Delta x}$,结合导数定义求解.

4. A 【解析】由切线方程为 $x-y-1=0$,

可知当 $x=1$ 时,$y=0$,

且切线斜率为 1,

即 $f(1)=0$,$f'(1)=1$,

所以 $f(1)+f'(1)=1$. **故选** A.

5. C 【解析】由导数的几何意义,可知曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线的斜率为 $f'(1)$.

根据导数概念,$f'(1)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(1+2\Delta x)-f(1)}{2\Delta x}$,

又 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(1+2\Delta x)-f(1)}{\Delta x}$

$$=2\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(1+2\Delta x)-f(1)}{2\Delta x}$$

$=2f'(1)=2$,

所以 $f'(1)=1$. **故选** C.

6. $3x-4y-8=0$ 或 $3x+y-8=0$

思路导引 先利用导数的定义求出 $f'(x)$，设切点坐标为 $(x_0,y_0)(x_0\neq0)$，由导数的几何意义可得切线的斜率 k，再由切线过点 (x_0,y_0) 和 $\left(\frac{8}{3},0\right)$，表示出切线的斜率，从而求出 x_0，则可得到斜率，进而可求出切线方程.

【解析】 $f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to0}\dfrac{x+\Delta x+\frac{4}{x+\Delta x}-x-\frac{4}{x}}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to0}\left[1-\dfrac{4}{x(x+\Delta x)}\right]=1-\dfrac{4}{x^2}$，

点 $A\left(\frac{8}{3},0\right)$ 不在曲线上，

设切点坐标为 $(x_0,y_0)(x_0\neq0)$，

则切线的斜率 $k=f'(x_0)=1-\dfrac{4}{x_0^2}$，

又切线过点 (x_0,y_0) 和 $\left(\frac{8}{3},0\right)$，

所以 $k=\dfrac{y_0}{x_0-\frac{8}{3}}=\dfrac{3y_0}{3x_0-8}$，

所以 $1-\dfrac{4}{x_0^2}=\dfrac{3y_0}{3x_0-8}=\dfrac{3\left(x_0+\frac{4}{x_0}\right)}{3x_0-8}=\dfrac{3x_0^2+12}{3x_0^2-8x_0}$，整理得 $x_0^3+3x_0^2-4x_0=0$，

因为 $x_0\neq0$，所以 $x_0=-4$ 或 $x_0=1$.

所以 $k=1-\dfrac{4}{(-4)^2}=\dfrac{3}{4}$ 或 $k=1-\dfrac{4}{1^2}=-3$，所以所求切线方程为 $y=\dfrac{3}{4}\cdot\left(x-\dfrac{8}{3}\right)$ 或 $y=-3\left(x-\dfrac{8}{3}\right)$，

即 $3x-4y-8=0$ 或 $3x+y-8=0$.

7.【解】(1) 由导数的几何意义可知曲线 $y=f(x)$ 上任意一点 $(x_0,f(x_0))$ 处的切线斜率为 $f'(x_0)$，则由导数的定义，可得 $f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=$

$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{(x_0+\Delta x)^2-4(x_0+\Delta x)+3-(x_0^2-4x_0+3)}{\Delta x}=2x_0-4$,

即曲线 $y=f(x)$ 上任意一点 $(x_0, f(x_0))$ 处的切线斜率为 $2x_0-4$.

(2)$f(3)=0$,由(1)知,曲线 $y=f(x)$ 在点 $(3,f(3))$ 处的切线斜率为 $f'(3)=2$,所以所求切线方程为 $y-0=2(x-3)$,即 $2x-y-6=0$.

8. 思路导引 (1)利用直线的斜率公式可求 k_1,利用导数的定义可求 k_2,比较可得结果;

(2)利用导数的定义可求点 $(a, f(a))(a>0)$ 处的切线的斜率,进而求得切线方程,求得其在 x 轴和 y 轴上的截距,从而可得 $\frac{1}{4}a^{\frac{3}{2}}=2$,求解即可.

【解】(1)易知 $A(1,1)$,$B(2,\sqrt{2})$,

所以割线 AB 的斜率 $k_1=\dfrac{\sqrt{2}-1}{2-1}=\sqrt{2}-1$.

曲线 $y=f(x)$ 在点 A 处的切线的斜率 $k_2=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\Delta x}-1}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{1}{\sqrt{1+\Delta x}+1}=\dfrac{1}{2}$,所以 $k_2>k_1$.

(2)曲线 $y=f(x)$ 在点 $(a,f(a))(a>0)$ 处的切线的斜率为 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\sqrt{a+\Delta x}-\sqrt{a}}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{1}{\sqrt{a+\Delta x}+\sqrt{a}}=\dfrac{\sqrt{a}}{2a}$,

所以曲线 $y=f(x)$ 在点 $(a,f(a))$ 处的切线方程为 $y-\sqrt{a}=\dfrac{\sqrt{a}}{2a}(x-a)$,即 $y=\dfrac{\sqrt{a}}{2a}x+\dfrac{\sqrt{a}}{2}$,

该切线在 x 轴和 y 轴上的截距分别

为$-a$和$\frac{\sqrt{a}}{2}$,所以切线与两坐标轴所围成的三角形的面积为$\frac{1}{4}a^{\frac{3}{2}}$,故$\frac{1}{4}a^{\frac{3}{2}}=2$,解得$a=4$.

§1～§2 节测上分

1. C 【解析】$v=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{s(3+\Delta t)-s(3)}{\Delta t}$是当$\Delta t\to 0$时该物体从3 s到$(3+\Delta t)$ s这段时间内的平均速度的极限值,即是该物体在3 s这一时刻的瞬时速度. **故选** C.

2. A 【解析】由题图可知,$f(x)$的图象

在$x=x_1$处切线的斜率大于0,

在$x=x_2$处切线的斜率小于0,在$x=x_3$处切线的斜率等于0,

根据导数的几何意义可知,$f'(x_1)>0$,$f'(x_2)<0$,$f'(x_3)=0$,

所以$f'(x_1)>f'(x_3)>f'(x_2)$. **故选** A.

3. B 【解析】探测器与月球表面距离逐渐减小,直至着陆时,距离为0 m,

故$v=\frac{0-15\,000}{12\times 60}=-\frac{125}{6}$(m/s).

探测器的速度逐渐减小,直至着陆时,探测器相对月球的纵向速度降为0 m/s,故$a=\frac{0-1\,700}{12\times 60}=-\frac{85}{36}$(m/s^2).

故选 B.

4. A 【解析】如图,过点$A(2,f(2))$作$f(x)$图象的切线l_A,

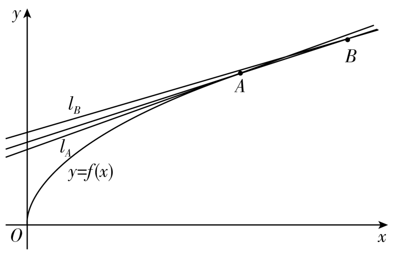
设l_A的斜率为k_1,过点$B(3,f(3))$作$f(x)$图象的切线l_B,设l_B的斜率为k_2,

作直线AB,设其斜率为k_3,由图可知,$k_1>k_3>k_2$.

$k_1=f'(2)$,$k_2=f'(3)$,$k_3=\frac{f(3)-f(2)}{3-2}=f(3)-f(2)$,

所以$f'(2)>f(3)-f(2)>f'(3)$. **故**

选 A.



5. C 【解析】函数 $f(x)=\frac{1}{2}x^2$ 在区间 $[1,3]$ 上的平均变化率为 $\frac{f(3)-f(1)}{3-1}=\frac{\frac{9}{2}-\frac{1}{2}}{2}=2$,

$f(x)=\frac{1}{2}x^2$ 在 $x=m$ 时的瞬时变化率为 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(m+\Delta x)-f(m)}{\Delta x}$

$=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{1}{2}(m+\Delta x)^2-\frac{1}{2}m^2}{\Delta x}$

$=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\left(\frac{1}{2}\Delta x+m\right)$

$=m$,

所以 $m=2$. **故选 C.**

6. ABD 【解析】对于 A,

$\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h}$

$=\frac{1}{2}\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{h}$

$=\frac{1}{2}\left[\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}+\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x_0)-f(x_0-h)}{h}\right]$

$=\frac{1}{2}\times 2f'(x_0)=2$,**所以 A 正确**;

对于 B,$\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=f'(x_0)=2$,**所以 B 正确**;

对于 C,$\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x_0+2h)-f(x_0)}{h}$

$=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x_0+2h)-f(x_0+h)}{h}+\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$

$=2f'(x_0)=4$,**所以 C 不正确**;

对于 D，$\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(x_0+2h)-f(x_0)}{2h}$

$=\dfrac{1}{2}\left[\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(x_0+2h)-f(x_0+h)}{h}+\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\right]=f'(x_0)=2$，所以 D 正确.

故选 ABD.

7.【解】(1) $f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to0}\dfrac{(x+\Delta x)^3-x^3}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to0}[3x^2+3x\Delta x+(\Delta x)^2]=3x^2$，

当 $x=1$ 时，$f'(1)=3$，

所以曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,1)$ 处的切线方程为 $y-1=3(x-1)$，即 $3x-y-2=0$.

(2) 设切点坐标为 (x_0,x_0^3)，由 (1) 知切线的斜率为 $f'(x_0)=3x_0^2$，

故切线方程为 $y-x_0^3=3x_0^2(x-x_0)$，

因为切线过点 $(-1,-1)$，

所以 $-1-x_0^3=3x_0^2(-1-x_0)$，

即 $(x_0+1)^2(2x_0-1)=0$，

所以 $x_0=-1$ 或 $x_0=\dfrac{1}{2}$，

故过点 $(-1,-1)$ 且与曲线 $y=f(x)$ 相切的直线有两条，

其方程分别是 $y+1=3(x+1)$ 和 $y-\dfrac{1}{8}=\dfrac{3}{4}\left(x-\dfrac{1}{2}\right)$，

即 $3x-y+2=0$ 和 $3x-4y-1=0$.

§3　导数的计算

对点上分

1. C　【解析】对于 A，$(x^3)'=3x^2$，故 A 错误；

对于 B，$(e^x)'=e^x$，故 B 错误；

对于 C，$(\lg x)'=\dfrac{1}{x\ln 10}$，故 C 正确；

对于 D，$(\cos x)'=-\sin x$，故 D 错误.

故选 C.

2. D 【解析】$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(2+\Delta x)-f(2)}{3\Delta x}=\dfrac{1}{3}\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(2+\Delta x)-f(2)}{\Delta x}=\dfrac{1}{3}f'(2)$,

由于 $f(x)=5^x$,则 $f'(x)=5^x\ln 5$,

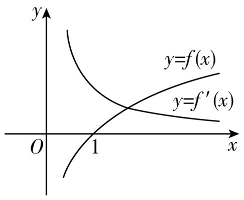
故 $\dfrac{1}{3}f'(2)=\dfrac{25\ln 5}{3}$,

故 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(2+\Delta x)-f(2)}{3\Delta x}=\dfrac{25\ln 5}{3}$,**故选** D.

3. C 【解析】(1)$\because f'(x)=0$,$\therefore$ 不存在 x_0 使得 $f(x_0)=f'(x_0)$,$\therefore f(x)=3$ 没有"巧值点".

(2)由 $f'(x)=2x$,令 $f'(x)=f(x)$,即 $2x=x^2$,解得 $x=0$ 或 $x=2$,$\therefore f(x)=x^2$ 有"巧值点".

(3)$f'(x)=\dfrac{1}{x}(x>0)$,作出 $y=f(x)$,$y=f'(x)$ 的大致图象如图,



由图象知 $\dfrac{1}{x}=\ln x$ 有解,$\therefore f(x)=\ln x$ 有"巧值点".

(4)$\because f'(x)=\cos x$,当 $x=\dfrac{\pi}{4}$ 时,$\sin x=\cos x$,$\therefore f(x)=\sin x$ 有"巧值点".

故有"巧值点"的函数有 3 个. **故选** C.

4. B 【解析】因为 $f'(x)=e^x$,所以 $f'(0)=1$,故曲线 $f(x)=e^x$ 在点 $(0,1)$ 处的切线方程为 $y=x+1$,**故选** B.

5. B

思路导引 设切点 $P(x_0,y_0)(x_0>0)$,利用导数的几何意义求得 $x_0=\dfrac{1}{16}$,再将点 P 坐标代入直线和曲线方程,即可求解.

【解析】$y=\sqrt{x}$,则 $y'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$,

由题可知切线斜率为 2，设切点为 $P(x_0,y_0)(x_0>0)$，则切线斜率 $k=\frac{1}{2\sqrt{x_0}}=2$，解得 $x_0=\frac{1}{16}$.

因为点 P 在直线 $y=2x+a$ 上，

所以 $y_0=2x_0+a=\frac{1}{8}+a$，又 $y_0=\sqrt{x_0}=\frac{1}{4}$，所以 $a=\frac{1}{8}$.

故选 B.

6. A 【解析】设与直线 $x-y+1=0$ 平行的直线与曲线相切于点 $(x_0,\ln x_0)(x_0>0)$，则 $f'(x_0)=\frac{1}{x_0}=1$，曲线 $f(x)=\ln x$ 上的点 $(x_0,\ln x_0)$ 到直线 $x-y+1=0$ 的距离是所求的最短距离，

故切点坐标为 $(1,0)$，点 $(1,0)$ 到直线 $x-y+1=0$ 的距离是 $\frac{|1-0+1|}{\sqrt{1+(-1)^2}}=\sqrt{2}$，

所以曲线 $f(x)=\ln x$ 上的点到直线 $x-y+1=0$ 的最短距离是 $\sqrt{2}$.

故选 A.

7. A 【解析】$\because y=\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}=\cos x$，

$\therefore y'=-\sin x$.

设 $P(x_0,y_0)$，则曲线在点 P 处的切线的斜率 $k=\tan\alpha=-\sin x_0$，$\therefore -1\leqslant\tan\alpha\leqslant 1$.

$\because 0\leqslant\alpha<\pi$，$\therefore \alpha$ 的取值范围为 $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]\cup\left[\frac{3\pi}{4},\pi\right)$. **故选** A.

8. $\frac{1}{2}x+y-2=0$ 【解析】设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，$x_1\neq0$，$x_2\neq0$.

$\left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^2}$，所以切线 PA 的方程为 $y-y_1=-\frac{1}{x_1^2}(x-x_1)$，

把点 P 的坐标代入上式可得 $\frac{1}{2}-y_1=$

$-\frac{1}{x_1^2}(1-x_1)$①.

因为切点 A 在曲线 C 上,所以 $y_1=\frac{1}{x_1}$,

代入①式可得 $\frac{1}{2}-y_1=-\frac{y_1}{x_1}(1-x_1)$,

化简可得 $\frac{1}{2}x_1+y_1-2x_1y_1=0$,

又 $x_1y_1=1$,所以 $\frac{1}{2}x_1+y_1-2=0$.

同理可得 $\frac{1}{2}x_2+y_2-2=0$.

所以直线 AB 的方程为 $\frac{1}{2}x+y-2=0$.

9. $3\ln 3$

思路导引 根据题意结合对称性可设 $A(x_0,\ln x_0)$,$x_0>1$,则 $B(\ln x_0,x_0)$,结合导数的几何意义求得 x_0,再将点 A 的坐标代入 $y=\frac{a}{x}$ 中即可得结果.

【解析】因为 $y=\ln x$ 和 $y=e^x$ 互为反函数,其图象关于直线 $y=x$ 对称,

且反比例函数 $y=\frac{a}{x}(a>0)$ 的图象也关于直线 $y=x$ 对称,

所以点 A,B 关于直线 $y=x$ 对称,设 $A(x_0,\ln x_0)$,$x_0>1$,则 $B(\ln x_0,x_0)$.

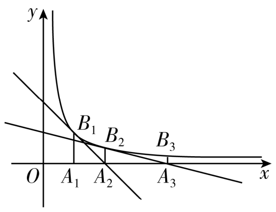
设 $f(x)=\ln x$,$g(x)=e^x$,则 $f'(x)=\frac{1}{x}$,$g'(x)=e^x$,

由题意可得 $k_1+k_2=\frac{1}{x_0}+e^{\ln x_0}=\frac{1}{x_0}+x_0=\frac{10}{3}$,解得 $x_0=3$ 或 $x_0=\frac{1}{3}$(舍去),

可得 $A(3,\ln 3)$,则 $\frac{a}{3}=\ln 3$,所以 $a=3\ln 3$.

10. $(2,0)$　$2-\frac{1}{2^{n-1}}$　**【解析】**设 $A_n(a_n$,

$0)$，$a_n>0, n\in\mathbf{N}_+$，则 $B_n\left(a_n,\dfrac{1}{a_n}\right)$.



由 $y=\dfrac{1}{x}(x>0)$ 得 $y'=-\dfrac{1}{x^2}$，则曲线 C 在点 B_n 处的切线的斜率为 $-\dfrac{1}{a_n^2}$，

切线方程为 $y-\dfrac{1}{a_n}=-\dfrac{1}{a_n^2}(x-a_n)$，即 $y=-\dfrac{1}{a_n^2}x+\dfrac{2}{a_n}$，

令 $y=0$ 得 $x=2a_n$，则 $a_{n+1}=2a_n$.

$a_1=1\neq0$，则数列 $\{a_n\}$ 是以 1 为首项，2 为公比的等比数列，则 $a_n=2^{n-1}$，

故 $a_2=2$，即点 A_2 的坐标为 $(2,0)$.

$|A_nB_n|=\dfrac{1}{a_n}=\dfrac{1}{2^{n-1}}$，则 $|A_1B_1|+|A_2B_2|+|A_3B_3|+\cdots+|A_nB_n|=\dfrac{1}{2^0}+\dfrac{1}{2^1}+\dfrac{1}{2^2}+\cdots+\dfrac{1}{2^{n-1}}=\dfrac{1-\dfrac{1}{2^n}}{1-\dfrac{1}{2}}=2-\dfrac{1}{2^{n-1}}$.

§4 导数的四则运算法则

4.1 导数的加法与减法法则+

4.2 导数的乘法与除法法则

对点上分

1. D 【解析】因为 $f(x)=x^3+\dfrac{4}{x}$，所以 $f'(x)=3x^2-\dfrac{4}{x^2}$，所以 $f'(-2)=3\times(-2)^2-\dfrac{4}{(-2)^2}=12-1=11$. 故选 D.

2.【解】(1) $y'=x'\cdot e^x+x\cdot(e^x)'=e^x+xe^x=(1+x)e^x$.

(2) 方法一：因为 $(x+1)(x+2)(x+$

$3)=(x^2+3x+2)(x+3)=x^3+6x^2+11x+6$,

所以 $y'=[(x+1)(x+2)(x+3)]'=(x^3+6x^2+11x+6)'=3x^2+12x+11$.

方法二:$y'=(x+1)'(x+2)(x+3)+(x+2)'(x+1)(x+3)+(x+3)'(x+1)(x+2)=(x^2+5x+6)+(x^2+4x+3)+(x^2+3x+2)=3x^2+12x+11$.

(3) $y'=\left(\dfrac{2x}{x^2+1}\right)'$

$=\dfrac{(2x)'(x^2+1)-2x(x^2+1)'}{(x^2+1)^2}$

$=\dfrac{2(x^2+1)-4x^2}{(x^2+1)^2}$

$=\dfrac{2-2x^2}{x^4+2x^2+1}$.

(4) $y'=(x\sin x)'-\left(\dfrac{2}{\cos x}\right)'=\sin x+x\cos x-\dfrac{2\sin x}{\cos^2 x}$.

3. A 【解析】由 $f(x)=f'(2)\ln x-\dfrac{1}{2}x^2+x$,得 $f'(x)=\dfrac{f'(2)}{x}-x+1$,所以 $f'(2)=\dfrac{f'(2)}{2}-2+1$,解得 $f'(2)=-2$. **故选** A.

4. B 【解析】由题意有 $g(1)=2\times1-1=1$,$g'(1)=2$,所以 $f(1)=g(1)=1$.

$f'(x)=2xg(x)+x^2g'(x)$,

所以 $f'(1)=2g(1)+g'(1)=2\times1+2=4$,

所以所求切线方程为 $y-1=4(x-1)$,

即 $y=4x-3$. **故选** B.

5. D 【解析】$f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$,

$f'(x)=\dfrac{1}{x}-4x=\dfrac{1-4x^2}{x}$.

$f'(x)>0\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{1-4x^2}{x}>0,\\ x>0,\end{cases}$ 解得 $0<x<\dfrac{1}{2}$.

故选 D.

6. BC 【解析】因为 $f(x)=x^2+2\ln x, x>0$，所以 $f'(x)=2x+\dfrac{2}{x}, x>0$.

又 $f(x)$ 在 A,B 两点处的切线相互平行，所以 $2x_1+\dfrac{2}{x_1}=2x_2+\dfrac{2}{x_2}$，

整理得 $(x_1-x_2)\left(1-\dfrac{1}{x_1x_2}\right)=0$，

因为 $x_1\neq x_2$，

所以 $x_1x_2=1$.

$x_1+x_2>2\sqrt{x_1x_2}=2$，故 B，C 符合题意.

故选 BC.

7. 【解】(1) 由题知，$f'(x)=1+4x^3$，设曲线 $y=f(x)$ 与垂直于直线 $2x+y-1=0$ 的切线相切于点 (x_0, y_0)，

则 $y_0=x_0+x_0^4$，

切线的斜率为 $f'(x_0)=1+4x_0^3=\dfrac{1}{2}$，

所以 $x_0=-\dfrac{1}{2}, y_0=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{16}=-\dfrac{7}{16}$，

所以切线方程为 $y-\left(-\dfrac{7}{16}\right)=\dfrac{1}{2}\left(x+\dfrac{1}{2}\right)$，即 $8x-16y-3=0$.

(2) 设切点的横坐标为 m，直线 l 的斜率为 k，

则直线 l 的方程为 $y=kx-3$，

则 $\begin{cases}1+4m^3=k,\\ m+m^4=km-3,\end{cases}$

则 $m+m^4=m(1+4m^3)-3$，整理得 $m^4=1$，所以 $m=\pm1$.

当 $m=-1$ 时，$k=-3$，切线方程为 $3x+y+3=0$；

当 $m=1$ 时，$k=5$，切线方程为 $5x-y-3=0$.

故直线 l 的方程为 $3x+y+3=0$ 或 $5x-y-3=0$.

§5　简单复合函数的求导法则

对点上分

1. C　【解析】由 $f(x)=\sqrt{x^2+1}$,

得 $f'(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$,

$\therefore f'(1)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. 故选 C.

2. C　【解析】对于 A,易知$(\sqrt{1-x})'=[(1-x)^{\frac{1}{2}}]'=\dfrac{1}{2}(1-x)^{-\frac{1}{2}}\cdot(1-x)'=-\dfrac{1}{2\sqrt{1-x}}$,

故 A 错误;

对于 B,$(\sin^2x)'=2\sin x\cdot(\sin x)'=2\sin x\cos x$,故 B 错误;

对于 C,$[\cos 2+\ln(1-2x)]'=0+\dfrac{1}{1-2x}\cdot(1-2x)'=\dfrac{-2}{1-2x}=\dfrac{2}{2x-1}$,故 C 正确;

对于 D,$\left(\dfrac{1}{1-x^2}\right)'=\dfrac{-(1-x^2)'}{(1-x^2)^2}=\dfrac{2x}{(1-x^2)^2}$,故 D 错误.

故选 C.

3. **思路导引**　(1)求 $h(1)$ 时,赋值代入计算即可,求 $h'(1)$ 需要先求出 $h(x)$ 的导数,然后赋值代入计算即可.

(2)求 $h(1)$ 时,赋值代入计算即可,求 $h'(1)$ 需要先应用复合函数的求导法则求出 $h(x)$ 的导数,然后赋值代入计算即可.

【解】(1)因为 $h(x)=3g(x)+2f(x)+1$,所以 $h(1)=3g(1)+2f(1)+1=3\times4+2\times2+1=17$.

因为 $h'(x)=3g'(x)+2f'(x)$,

所以 $h'(1)=3g'(1)+2f'(1)=3\times5+2\times3=21$.

(2)因为 $h(x)=\dfrac{2g(2-x)-1}{3f(2x-1)}$,

所以 $h(1)=\dfrac{2g(1)-1}{3f(1)}=\dfrac{2\times4-1}{3\times2}=\dfrac{7}{6}$.

因为 $h'(x)=\{-2g'(2-x)\times 3f(2x-1)-[2g(2-x)-1]\times 6f'(2x-1)\}\div[3f(2x-1)]^2$，所以 $h'(1)=\{-2g'(1)\times 3f(1)-[2g(1)-1]\times 6f'(1)\}\div[3f(1)]^2=[-2\times5\times3\times2-(2\times4-1)\times6\times3]\div(3\times2)^2=-\frac{31}{6}$.

4. B 【解析】由 $y=e^{2ax}+1$ 得 $y'=2ae^{2ax}$，

当 $x=0$ 时，$y'=2a$，

因为曲线 $y=e^{2ax}+1$ 在点 $(0,2)$ 处的切线与直线 $2x+y+1=0$ 垂直，故 $2a=\frac{1}{2}$，

解得 $a=\frac{1}{4}$. **故选 B.**

5. C 【解析】因为 $f(x)=\frac{x}{e^x}-f'(0)\sin 2x$，所以 $f'(x)=\frac{1-x}{e^x}-2f'(0)\cos 2x$，

所以 $f'(0)=1-2f'(0)\cos 0=1-2f'(0)$，所以 $f'(0)=\frac{1}{3}$. **故选 C.**

6. B 【解析】由题知 $f'(x)=-3f'(2-x)+4x-\frac{1}{x}$，所以 $f'(1)=-3f'(1)+4\times1-1=-3f'(1)+3$，解得 $f'(1)=\frac{3}{4}$. **故选 B.**

7. B 【解析】由 $f(x)=e^{2x}-\sin x$，得 $f'(x)=2e^{2x}-\cos x$，$f''(x)=4e^{2x}+\sin x$.

因为 $f'(0)=1$，$f''(0)=4$，

所以曲线 $f(x)=e^{2x}-\sin x$ 在点 $(0,f(0))$ 处的曲率为 $\frac{|f''(0)|}{\{1+[f'(0)]^2\}^{\frac{3}{2}}}=\frac{4}{(1+1)^{\frac{3}{2}}}=\sqrt{2}$.

故选 B.

8. AB

攻略上分 根据 $f(3-2x)$ 是奇函数，赋值得到 $f(3)$ 的值，判断 A 选项. 通过复合函数的导数，求出 $g(x)$ 的图象关于直线 $x=3$ 对称，也可以利用大招攻略 18，由 $f(x)$ 的图象关于点 $(3,0)$ 对称直接得到 $g(x)$ 的图象关于直线 $x=3$ 对称，再根据 $g(x+1)$ 是奇函数，可以得到 $g(x)$ 的图象关于点 $(1,0)$ 对称，进而可得到 $g(x)$ 的周期，从而判断 B 选项. 对于 C，D 两个选项，可以通过对称轴和对称中心判断，也可以通过举反例判断.

【解析】对于 A，由 $f(3-2x)$ 为奇函数，得 $f(3-2x)+f(3+2x)=0$，令 $x=0$，得 $f(3)+f(3)=0$，所以 $f(3)=0$（另解：$f(3-2x)$ 为奇函数，那么这个函数的图象过点 $(0,0)$，可得 $f(3)=0$），**故 A 正确.**

对于 B，由 $f(3-2x)+f(3+2x)=0$，得 $f(3-x)+f(3+x)=0$，

则 $f(x)=-f(6-x)$，

得 $f'(x)=f'(6-x)$，即 $g(x)=g(6-x)$，

可得 $g(x)$ 的图象关于直线 $x=3$ 对称，

又 $g(x+1)$ 为奇函数，所以 $g(x)$ 的图象关于点 $(1,0)$ 对称，可得 $g(x)$ 的一个周期为 8，故 $g(3)=g(-5)$，**故 B 正确.**

对于 C，由题中信息可得 $g(x)$ 的图象关于直线 $x=3$ 对称，但无法确定 $g(3)$ 的值，**故 C 错误.**

对于 D，因为 $f(3-x)+f(3+x)=0$，所以 $f(x)$ 的图象关于点 $(3,0)$ 对称，所以 $f(1)=-f(5)$，但无法确定 $f(1)=$

$f(5)=0$ 是否成立,故无法得到 $f(1)=f(5)$,故 D 错误.

提示: C, D 选项相互照应,若 $g(x)$ 的图象关于点 $(3,0)$ 对称,则可以得到 $g(3)=0$,但 $g(x)$ 的图象关于直线 $x=3$ 对称不一定有 $g(3)=0$;若 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=3$ 对称,则可以得到 $f(1)=f(5)$,但 $f(x)$ 的图象关于点 $(3,0)$ 对称不一定有 $f(1)=f(5)$

故选 AB.

一题多解 对于 B,由 $f(3-x)+f(3+x)=0$,可知 $f(x)$ 的图象关于点 $(3,0)$ 对称,可直接得到 $g(x)$ 的图象关于直线 $x=3$ 对称,通过 $g(x+1)$ 为奇函数,可得 $g(x)$ 的图象关于点 $(1,0)$ 对称,故 $g(x)$ 的周期为 8,故 $g(3)=g(-5)$,故 B 正确.

对于 C,D,设 $f(x)=\cos\left(\frac{\pi}{4}x-\frac{\pi}{4}\right)$,则 $g(x)=f'(x)=-\frac{\pi}{4}\cdot\sin\left(\frac{\pi}{4}x-\frac{\pi}{4}\right)$,

此时 $f(3-2x)=\cos\left[\frac{\pi}{4}(3-2x)-\frac{\pi}{4}\right]=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}x\right)=\sin\frac{\pi}{2}x$, $g(x+1)=-\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{4}x$,满足 $f(3-2x)$ 与 $g(x+1)$ 为奇函数,但此时 $g(3)=-\frac{\pi}{4}\neq 0$, $f(1)=\cos 0=1$, $f(5)=\cos\pi=-1$, $f(1)\neq f(5)$,故 C,D 错误.

9. AC 【解析】对 $f(x)=g(2-x)+1$ 两边同时求导可得 $f'(x)=-g'(2-x)$.

$f'(x)$的图象关于直线$x=2$对称,可得$f'(2+x)=f'(2-x)$.

A 选项,由$f'(x)=-g'(2-x)$,可得$f'(2+x)=-g'(-x)$,

由$f'(x-2)=g'(x)$,可得$f'(2+x)=g'(x+4)$,

则$g'(x+4)=-g'(-x)$,所以$g'(x+4)+g'(-x)=0$,所以$g'(x+2)+g'(2-x)=0$,

故函数$g'(x)$的图象关于点$(2,0)$对称,**故 A 正确**.

B 选项,若函数$g'(x)$的图象关于直线$x=2$对称,则$g'(2+x)=g'(2-x)$.

又$f'(x)=-g'(2-x)\Rightarrow g'(2-x)=-f'(x)$,$f'(x-2)=g'(x)\Rightarrow g'(x+2)=f'(x)$,则$f'(x)=-f'(x)$,此时$f'(x)=0$,即$f(x)$是常数函数,但$f(x)$不一定是常数函数,**故 B 错误**.

C 选项,由$f'(x)=-g'(2-x)$,可得$f'(2-x)=-g'(x)$.

由 A 选项的分析知$f'(2+x)=g'(4+x)$,$f'(2+x)=f'(2-x)$,

则$g'(4+x)=-g'(x)$,所以$g'(8+x)=-g'(4+x)=g'(x)$,则函数$g'(x)$的一个周期为 8,**故 C 正确**.

D 选项,若函数$g'(x)$为奇函数,则$g'(x)=-g'(-x)$.

由$f'(x)=-g'(2-x)$,可得$g'(-x)=-f'(x+2)$. 又$f'(x-2)=g'(x)$,

所以$f'(x+2)=f'(x-2)$,得$f'(x)$的一个周期为 4,但题目条件不足以说明$f'(x)$的周期情况,**故 D 错误. 故选 AC.**

§3~§5 节测上分

1. B 【解析】对于 A,$\left(x-\frac{1}{x}\right)'=\frac{1+x^2}{x^2}$,

故 A 正确；

对于 B，$(x^2e^x)'=2xe^x+x^2e^x$，故 B 错误；

对于 C，$[\ln(2x-1)]'=\frac{2}{2x-1}$，故 C 正确；

对于 D，$(\log_2 x)'=\frac{1}{x\ln 2}$，故 D 正确.

故选 B.

2. B 【解析】由 $y=\tan x$，求导得 $y'=\frac{1}{\cos^2 x}$，当 $x=\frac{\pi}{6}$时，$y'=\frac{1}{\cos^2\frac{\pi}{6}}=\frac{4}{3}$，所以所求切线的斜率为$\frac{4}{3}$. 故选 B.

3. B 【解析】根据水的体积可得 $20xy=2\ 000$，$x\geqslant\frac{5}{3}$，$0<y\leqslant 60$，

即 $y=\frac{100}{x}$，$x\geqslant\frac{5}{3}$，$0<y\leqslant 60$，

则 $y'=-\frac{100}{x^2}$，令 $x=20$，可得 $y'=-\frac{1}{4}$，

所以水面高度 y 的瞬时变化率为 $-\frac{1}{4}$. 故选 B.

4. B 【解析】设 $f(x)=e^x-ax$ 的图象与直线 $2x-y=0$ 相切于点$(x_0,e^{x_0}-ax_0)$.

因为直线 $2x-y=0$ 的斜率为 2，$f'(x)=e^x-a$，所以 $e^{x_0}-a=2$，

解得 $a=e^{x_0}-2$，故切点纵坐标 $e^{x_0}-ax_0=e^{x_0}-(e^{x_0}-2)x_0=e^{x_0}-x_0e^{x_0}+2x_0$，

又点$(x_0,e^{x_0}-x_0e^{x_0}+2x_0)$在直线 $2x-y=0$ 上，所以 $2x_0-e^{x_0}+x_0e^{x_0}-2x_0=0$，

即$(x_0-1)e^{x_0}=0$，解得 $x_0=1$，故 $a=e^1-2=e-2$. 故选 B.

5. B 【解析】因为 $f(x)=f'\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos x+\sin x$，所以$f'(x)=-f'\left(\frac{\pi}{4}\right)\sin x+\cos x$，

令 $x=\frac{\pi}{4}$，得到 $f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=-f'\left(\frac{\pi}{4}\right)\cdot$

$\sin\frac{\pi}{4}+\cos\frac{\pi}{4}$，解得 $f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}-1$，

则 $f(x)=(\sqrt{2}-1)\cos x+\sin x$，

而 $f(0)=\sqrt{2}-1$，

故切点坐标为 $(0,\sqrt{2}-1)$.

$f'(x)=-(\sqrt{2}-1)\sin x+\cos x$，

则 $f'(0)=1$.

设曲线 $y=f(x)$ 在 $x=0$ 处的切线的斜率为 k，

由导数的几何意义得 $k=f'(0)=1$，

故切线方程为 $y-(\sqrt{2}-1)=x$，即 $y=x+\sqrt{2}-1$，

令 $x=0$，得到 $y=\sqrt{2}-1$，所以切线与 y 轴的交点为 $(0,\sqrt{2}-1)$，

令 $y=0$，得到 $x=1-\sqrt{2}$，所以切线与 x 轴的交点为 $(1-\sqrt{2},0)$.

故所求三角形的面积为 $\frac{1}{2}\times|\sqrt{2}-1|\times|1-\sqrt{2}|=\frac{3-2\sqrt{2}}{2}$.

故选 B.

6. C 【解析】由 $f(x)=x^2-2$，可得 $f'(x)=2x$，则 $f'(x_0)=f'(2)=4$，

又 $f(2)=2$，所以 $f(x)$ 的图象在点 $(2,2)$ 处的切线方程为 $y=4(x-2)+2$，令 $y=0$，可得 $x=\frac{3}{2}$，即 $x_1=\frac{3}{2}$.

$f'(x_1)=f'\left(\frac{3}{2}\right)=3$，$f\left(\frac{3}{2}\right)=\left(\frac{3}{2}\right)^2-2=\frac{1}{4}$，

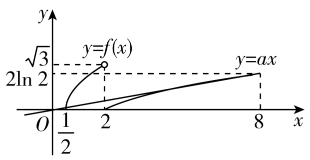
所以 $f(x)$ 的图象在点 $\left(\frac{3}{2},\frac{1}{4}\right)$ 处的切线方程为 $y=3\left(x-\frac{3}{2}\right)+\frac{1}{4}$，令 $y=0$，可得 $x=\frac{17}{12}$，即 $x_2=\frac{17}{12}$.

故选 C.

7. $\left[\frac{\ln 2}{4},\frac{1}{2e}\right)$ 【解析】因为 $g(x)=f(x)-ax$ 有三个不同的零点,所以 $f(x)=ax$ 有三个不同的实数根,

所以 $y=f(x)$ 与 $y=ax$ 的图象有三个交点,

在同一平面直角坐标系中作出 $y=f(x)$,$y=ax$ 的大致图象,如图所示.



当直线 $y=ax$ 经过点$(8,2\ln 2)$时,$a=\frac{\ln 2}{4}$.

当直线 $y=ax$ 与 $f(x)(x\in[2,8])$的图象相切时,

设切点坐标为$\left(x_0,\ln\frac{x_0}{2}\right)$,因为此时 $f(x)=\ln\frac{x}{2}$,所以 $f'(x)=\frac{1}{x}$,

所以切线方程为 $y-\ln\frac{x_0}{2}=\frac{1}{x_0}(x-x_0)$,

即 $y=\frac{x}{x_0}+\ln\frac{x_0}{2}-1$,

所以$\begin{cases}a=\frac{1}{x_0},\\ \ln\frac{x_0}{2}-1=0,\end{cases}$可得$\begin{cases}a=\frac{1}{2e},\\ x_0=2e.\end{cases}$

结合图象可知,若 $y=f(x)$,$y=ax$ 的图象有三个交点,则 $\frac{\ln 2}{4}\leqslant a<\frac{1}{2e}$.

8.【解】(1)由题可得 $f(0)=2$,

所以函数 $f(x)$的图象恒过定点 $P(0,2)$.

因为 $f'(x)=e^x+a$,所以 $f'(0)=1+a$.

因为 $f(x)$的图象在定点 P 处的切线与

直线 $3x+y+1=0$ 平行，

且直线 $3x+y+1=0$ 的斜率为-3，

所以 $f'(0)=1+a=-3$，解得 $a=-4$.

(2)直线 $3x+y+1=0$ 的斜率为-3，

因为函数 $f(x)$ 的图象存在与直线 $3x+y+1=0$ 垂直的切线，

所以$-3(e^x+a)=-1$ 有解，

即 $a=\frac{1}{3}-e^x$ 有解.

因为 $e^x>0$，所以$\frac{1}{3}-e^x<\frac{1}{3}$，

所以实数 a 的取值范围是$\left(-\infty,\frac{1}{3}\right)$.

§6 用导数研究函数的性质

6.1 函数的单调性

对点上分

1. B 【解析】对于 A，$(3\sin x)'=3\cos x$，在$(2,+\infty)$内不满足大于等于 0 恒成立，**故 A 错误**；

对于 B，$[(x-3)e^x]'=(x-3)'e^x+(x-3)(e^x)'=(x-2)e^x$，在$(2,+\infty)$内大于 0 恒成立，**故 B 正确**；

对于 C，$(x^3-15x)'=3x^2-15=3(x^2-5)$，在$(2,+\infty)$内不满足大于等于 0 恒成立，**故 C 错误**；

对于 D，$(\ln x-x)'=\frac{1}{x}-1=\frac{1-x}{x}$，在$(2,+\infty)$内不满足大于等于 0 恒成立，**故 D 错误. 故选 B.**

2. A 【解析】对于 $Q(t)=\frac{me^t}{e^t+7}$，由题意知 $Q(0)=5$，解得 $m=40$，

则 $Q(t)=\frac{40e^t}{e^t+7}$，

故 $Q'(t)=\frac{40e^t(e^t+7)-40e^t\cdot e^t}{(e^t+7)^2}=$

$\frac{280e^t}{(e^t+7)^2}=\frac{280}{e^t+\frac{49}{e^t}+14}$,

令 $e^t=u$,则 $u\geqslant 1$,因为 $y=u+\frac{49}{u}$ 在 $u\in[1,7]$ 上单调递减,在 $u\in[7,+\infty)$ 上单调递增,

利用复合函数的单调性,可知 $y=e^t+\frac{49}{e^t}$ 在 $t\in[0,\ln 7]$ 上单调递减且为正数,在 $t\in[\ln 7,+\infty)$ 上单调递增且为正数,

则函数 $Q'(t)$ 在 $[0,\ln 7]$ 上单调递增,在 $[\ln 7,+\infty)$ 上单调递减,

故该生物种群数量的增长速度先增大后减小. **故选 A.**

3. D 【**解析**】由 $f(x)=x\sin x+\cos x$ 可得 $f'(x)=\sin x+x\cos x-\sin x=x\cos x$,

当 $x\in(-\pi,0)$ 时,由 $x\cos x<0$ 可得 $\cos x>0$,解得 $x\in\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$;

当 $x\in(0,\pi)$ 时,由 $x\cos x<0$ 可得 $\cos x<0$,解得 $x\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$.

因此可得 $f(x)$ 在 $(-\pi,\pi)$ 上的单调递减区间是 $\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$ 和 $\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$.

提示: 注意单调区间不能用并集表示

故选 D.

4. B 【**解析**】对 $f(x)$ 求导,得 $f'(x)=-\frac{1}{2}f(1)\cdot\frac{1}{x}+2x-2f'(2)(x>0)$,

令 $x=2$ 可得

$f'(2)=-\frac{1}{4}f(1)+4-2f'(2)$,

即 $3f'(2)=-\frac{1}{4}f(1)+4$①,

由 $f(x)=-\frac{1}{2}f(1)\ln x+x^2-2f'(2)x$,

得$f(1)=1-2f'(2)$②,

联立①②可得$f'(2)=\frac{3}{2}$,$f(1)=-2$,

故$f'(x)=-\frac{1}{2}f(1)\cdot\frac{1}{x}+2x-2f'(2)=\frac{1}{x}+2x-3=\frac{2x^2-3x+1}{x}=\frac{(2x-1)(x-1)}{x}$,

由$f'(x)=\frac{(2x-1)(x-1)}{x}>0$,且$x>0$

解得$0<x<\frac{1}{2}$或$x>1$,

所以$f(x)$的单调递增区间为$\left(0,\frac{1}{2}\right)$,$(1,+\infty)$. **故选 B.**

5. **攻略上分** 通过求导并化简后,其符合二次指数函数型,利用通法攻略19通过对参数a分类讨论,研究函数的单调性.

【解】由$f(x)=ax+(1-a)e^x-\frac{e^{2x}}{2}(x\in\mathbf{R})$,得$f'(x)=a+(1-a)e^x-e^{2x}=(e^x+a)(1-e^x)$.

(1)当$a<0$时,令$f'(x)=0$得$x=0$或$x=\ln(-a)$.

①当$a<-1$时,$-a>1$,$\ln(-a)>0$,令$f'(x)>0$,得$0<x<\ln(-a)$,

令$f'(x)<0$,得$x<0$或$x>\ln(-a)$,

所以$f(x)$的单调递增区间为$(0,\ln(-a))$,单调递减区间为$(-\infty,0)$,$(\ln(-a),+\infty)$.

②当$a=-1$时,$f'(x)=(e^x-1)(1-e^x)=-(e^x-1)^2\leqslant0$,所以$f(x)$的单调递减区间为$(-\infty,+\infty)$,无单调递增区间.

③当$-1<a<0$时,

即$0<-a<1$,$\ln(-a)<0$,

令 $f'(x)>0$，得 $\ln(-a)<x<0$，

令 $f'(x)<0$，得 $x<\ln(-a)$ 或 $x>0$，

所以 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(\ln(-a),0)$，单调递减区间为 $(-\infty,\ln(-a))$，$(0,+\infty)$.

(2) 当 $a\geqslant 0$ 时，令 $f'(x)>0$，得 $x<0$，

令 $f'(x)<0$，得 $x>0$，

所以 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(-\infty,0)$，单调递减区间为 $(0,+\infty)$.

综上所述，

当 $a<-1$ 时，$f(x)$ 的单调递增区间为 $(0,\ln(-a))$，单调递减区间为 $(-\infty,0)$，$(\ln(-a),+\infty)$；

当 $a=-1$ 时，$f(x)$ 的单调递减区间为 $(-\infty,+\infty)$，无单调递增区间；

当 $-1<a<0$ 时，$f(x)$ 的单调递增区间为 $(\ln(-a),0)$，单调递减区间为 $(-\infty,\ln(-a))$，$(0,+\infty)$；

当 $a\geqslant 0$ 时，$f(x)$ 的单调递增区间为 $(-\infty,0)$，单调递减区间为 $(0,+\infty)$.

6. C 【**解析**】由题意知，$f(x)$ 的定义域为 $\{x|x\neq 0\}$，关于原点对称，

因为 $f(-x)=\frac{\ln x^2}{-x}=-\frac{\ln x^2}{x}=-f(x)$，所以 $f(x)$ 为奇函数，所以 $f(x)$ 的图象关于原点对称.

当 $x>0$ 时，$f'(x)=\frac{2(1-\ln x)}{x^2}$，令 $f'(x)>0$，解得 $0<x<e$；令 $f'(x)<0$，解得 $x>e$，

所以 $f(x)$ 在 $(0,e)$ 上单调递增，在 $(e,+\infty)$ 上单调递减，**故 C 正确**.

7. A 【**解析**】由题图可知 $y=f'(x)$ 在 $(-1,0)$ 上单调递减，在 $(0,1)$ 上单调递增.

选项 A，$y=f(x)$ 的切线斜率在 $(-1,0)$

上单调递减，在$(0,1)$上单调递增，**选项 A 符合题意；**

选项 B，$y=f(x)$的切线斜率在$(-1,0)$上单调递增，在$(0,1)$上单调递减，**选项 B 不符合题意；**

选项 C，$y=f(x)$的切线斜率在$(-1,1)$上单调递减，**选项 C 不符合题意；**

选项 D，$y=f(x)$的切线斜率在$(-1,1)$上单调递增，**选项 D 不符合题意.**

故选 A.

8. D 【解析】$\because f(x)=\frac{1}{3}x^3+ax^2+(a^2-1)x+1(a\in\mathbf{R},a\neq0)$，

$\therefore f'(x)=x^2+2ax+(a^2-1)=(x+a+1)(x+a-1)$，

$\therefore$ 导函数$f'(x)$的图象开口向上.

又 $a\neq0$，$\therefore f'(x)$的图象必为题图中的图③.

由图象特征知$f'(0)=a^2-1=0$，

且$f'(x)$图象的对称轴为直线 $x=-a>0$，

$\therefore a=-1$，故$f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2+1$，

故$f(-1)=-\frac{1}{3}$. **故选 D.**

9. C 【解析】由题图可知 $y=f(x)$在$[0,1]$上单调递增，在$[1,3)$上单调递减，

则当 $0\leqslant x\leqslant1$ 时，$f'(x)\geqslant0$ 且不恒为 0，当 $1\leqslant x<3$ 时，$f'(x)\leqslant0$ 且不恒为 0，此时等号仅在 $x=1$ 时成立，

由于 $y=f(x)$是定义在区间$(-3,3)$上的奇函数，

故 $y=f(x)$在$[-1,0]$上单调递增，在$(-3,-1]$上单调递减，

则当$-1\leqslant x\leqslant0$ 时，$f'(x)\geqslant0$ 且不恒为 0，当$-3<x\leqslant-1$ 时，$f'(x)\leqslant0$ 且不恒为 0，此时等号仅在 $x=-1$ 时成立，

故由$\frac{f'(x)}{x}\geqslant 0$可知

$\begin{cases}f'(x)\geqslant 0,\\x>0\end{cases}$或$\begin{cases}f'(x)\leqslant 0,\\x<0,\end{cases}$

得$0<x\leqslant 1$或$-3<x\leqslant -1$,即所求不等式的解集为$(-3,-1]\cup(0,1]$. **故选 C.**

10. ABC 【解析】对于选项 A,若C_2为$f'(x)$的图象,则当$x<0$时,$f'(x)<0$,且$f'(x)$单调递增,当$x>0$时,$f'(x)>0$,且$f'(x)$单调递增,所以$f(x)$在$(-\infty,0)$上单调递减,且切线斜率越来越大,在$(0,+\infty)$上单调递增,且切线斜率越来越大,图象可能正确,**故 A 正确.**

对于选项 B,若C_1为$f'(x)$的图象,则$f'(x)>0$且$f'(x)$单调递减,$f(x)$在$\mathbf{R}$上单调递增且切线斜率越来越小,图象可能正确,**故 B 正确.**

对于选项 C,若C_1为$f'(x)$的图象,则当$x\leqslant 0$时,$f'(x)=0$,$f(x)$为常数函数;当$x>0$时,$f'(x)>0$且$f'(x)$单调递增,$f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增且切线斜率越来越大,图象可能正确,**故 C 正确.**

对于选项 D,若C_1为$f'(x)$的图象,当$x\leqslant 0$时,$f'(x)>0$,$f(x)$单调递增,不符合题意;

若C_2为$f'(x)$的图象,当$x\leqslant 0$时,$f'(x)\leqslant 0$且不恒为 0,$f(x)$单调递减,不符合题意,**故 D 错误.**

故选 ABC.

11. B 【解析】因为函数$f(x)=x-\frac{4}{x}-a\ln x$在$[4,5]$上单调递增,

所以$f'(x)=1+\frac{4}{x^2}-\frac{a}{x}\geqslant 0$且不恒为

0 在$[4,5]$上恒成立，

所以 $a\leqslant x+\frac{4}{x}$，令 $g(x)=x+\frac{4}{x}$，$4\leqslant x\leqslant 5$，由对勾函数的性质知，$g(x)=x+\frac{4}{x}$ 在 $[4, 5]$ 上单调递增，所以 $g(x)_{\min}=g(4)=4+\frac{4}{4}=5$，所以 $a\leqslant 5$.

故选 B.

易错警示 函数在给定区间上单调递增或单调递减$\Rightarrow f'(x)\geqslant 0$ 且不恒为 0 或 $f'(x)\leqslant 0$ 且不恒为 0 在给定区间上恒成立，此处要特别注意并非大于 0 或小于 0，且不能恒等于 0.

12. D 【**解析**】由题知函数的定义域为 $(0,+\infty)$，$f'(x)=2x-\frac{1}{2x}=\frac{4x^2-1}{2x}$，

所以当 $x\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减；

当 $x\in\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增.

因为函数 $f(x)=x^2-\frac{1}{2}\ln x+\frac{3}{2}$ 在区间 $(a-1,a+1)$ 上不单调，

所以 $\begin{cases}a-1\geqslant 0,\\ a-1<\frac{1}{2}<a+1,\end{cases}$ 解得 $1\leqslant a<\frac{3}{2}$，即实数 a 的取值范围是 $\left[1,\frac{3}{2}\right)$. **故选 D.**

13. BD 【**解析**】当 $a=0$ 时，$f(x)=3x^2-x+1$，显然不满足题意.

当 $a\neq 0$ 时，依题意知，$f'(x)=3ax^2+6x-1$ 有两个不相等的零点，

所以 $\begin{cases}a\neq 0,\\ \Delta=36+12a>0,\end{cases}$ 解得 $a>-3$ 且 $a\neq$

0. **故选 BD.**

14. $\left(0,\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)\cup(1,+\infty)$ 【解析】由题意可知在$(0,+\infty)$上,$f'(x)=\frac{1}{x\ln a}+\frac{1}{x\ln(a+1)}=\frac{\ln(a^2+a)}{x\ln a\ln(a+1)}\geqslant 0$且不恒为0,

因为$a>0$且$a\neq 1$,所以$\ln(a+1)>0$,

则$\frac{\ln(a^2+a)}{\ln a}\geqslant 0$且不恒为0.

①当$\begin{cases}\ln(a^2+a)\geqslant 0,\\ \ln a>0\end{cases}$时,

得$\begin{cases}a^2+a\geqslant 1,\\ a>1,\end{cases}$解得$a>1$.

②当$\begin{cases}\ln(a^2+a)\leqslant 0,\\ \ln a<0\end{cases}$时,

得$\begin{cases}0<a^2+a\leqslant 1,\\ 0<a<1,\end{cases}$解得$0<a\leqslant\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

当$a=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$时,$f(x)=\log_{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}x+\log_{\frac{\sqrt{5}+1}{2}}x=0$为常数函数,所以$a\neq\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

综上,实数a的取值范围是$\left(0,\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)\cup(1,+\infty)$.

能力上分

1. D 【解析】对于A,令$f'(x)=3x^2-1<0$,解得$-\frac{\sqrt{3}}{3}<x<\frac{\sqrt{3}}{3}$,$f(x)$在$(0,+\infty)$上有单调递减区间,**故 A 错误;**

对于B,当$x\in(0,1)$时,$t=|x-1|$单调递减,$y=\ln t$单调递增,所以当$x\in(0,1)$时,$f(x)$单调递减,**故 B 错误;**

对于C,$f'(x)=-e^x+\cos x$,当$x\in(0,+\infty)$时,$-e^x<-1$,则$\cos x-e^x<0$,故$f'(x)<0$,**故 C 错误;**

对于D,$f'(x)=1+\frac{1}{x^2}>0$在$(0,+\infty)$恒成立,**故 D 正确. 故选 D.**

2. C　【解析】易知 $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，因为 $f'(x)=\frac{4}{x}-\frac{3}{x^2}-1=\frac{-x^2+4x-3}{x^2}(x>0)$，

所以令 $f'(x)>0$，可得 $-x^2+4x-3>0$，解得 $1<x<3$，

所以函数的单调递增区间为 $(1,3)$. **故选 C.**

3. A　【解析】由题意，$f'(x)=3x^2+2bx+c$，且 $f'(x)<0$ 的解集为 $(-2,4)$，

故 $\begin{cases}-\frac{2b}{3}=-2+4,\\ \frac{c}{3}=-2\times4,\end{cases}$

解得 $b=-3$，$c=-24$，故 $b+c=-27$. **故选 A.**

4. C　【解析】由 $f(x)$ 的图象可知，$f(x)$ 在 $\left(-\infty,\frac{1}{3}\right)$ 和 $(2,+\infty)$ 上单调递增，

在 $\left(\frac{1}{3},2\right)$ 上单调递减，

则当 $x\in\left(-\infty,\frac{1}{3}\right)$ 时，$f'(x)>0$，当 $x\in(2,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，

当 $x\in\left(\frac{1}{3},2\right)$ 时，$f'(x)<0$，由 $xf'(x)<0$ 知 $\begin{cases}x>0,\\ f'(x)<0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x<0,\\ f'(x)>0,\end{cases}$ 解得 $x<0$ 或 $\frac{1}{3}<x<2$，所以不等式 $xf'(x)<0$ 的解集为 $(-\infty,0)\cup\left(\frac{1}{3},2\right)$. **故选 C.**

5. A　【解析】假设 $f(x)=x^2-9\ln x+3x$ 在其定义域 $(0,+\infty)$ 内的子区间 $(m-1,m+1)$ 上不单调，

由 $f'(x)=2x-\frac{9}{x}+3=\frac{2x^2+3x-9}{x}=0$，

得 $x=\frac{3}{2}$ 或 $x=-3$（舍去），

所以 $\begin{cases}0\leqslant m-1<\frac{3}{2},\\ \frac{3}{2}<m+1,\end{cases}$ 解得 $1\leqslant m<\frac{5}{2}$，所

以 m 的取值范围为 $\left[1,\frac{5}{2}\right)$.

所以"$m\in\left(1,\frac{5}{2}\right)$"是"$f(x)$在其定义域内的子区间$(m-1,m+1)$上不单调"的充分不必要条件.

故选 A.

6. D

思路导引 根据题意,求得 $f'(x)=-2\sin^2x+a\sin x+3$,转化为 $2\sin^2x-a\sin x-3\leqslant0$ 恒成立,令 $t=\sin x(-1\leqslant t\leqslant1)$,得到 $g(t)=2t^2-at-3(-1\leqslant t\leqslant1)$,结合二次函数的性质,列出不等式组,即可求解.

【解析】由函数 $f(x)=\frac{1}{2}\sin 2x-a\cos x+2x$,

可得 $f'(x)=\cos 2x+a\sin x+2=-2\sin^2x+a\sin x+3$,

因为 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增,所以 $-2\sin^2x+a\sin x+3\geqslant0$ 且不恒为 0 在 $\mathbf{R}$ 上恒成立,

整理得 $2\sin^2x-a\sin x-3\leqslant0$,

令 $t=\sin x(-1\leqslant t\leqslant1)$,可得 $g(t)=2t^2-at-3(-1\leqslant t\leqslant1)$,

由二次函数的单调性得 $\begin{cases}g(-1)=a-1\leqslant0,\\g(1)=-a-1\leqslant0,\end{cases}$ 可得 $-1\leqslant a\leqslant1$,即实数 a 的取值范围为$[-1,1]$.

故选 D.

7. B 【解析】由 $\begin{cases}1+x>0,\\1+2x\geqslant0,\end{cases}$ 可得函数 $f(x)$的定义域为 $\left[-\frac{1}{2},+\infty\right)$,

由题意知 $f'(x)=\frac{1}{1+x}-\frac{1}{\sqrt{1+2x}}=\frac{\sqrt{1+2x}-1-x}{(1+x)\sqrt{1+2x}}$,

令函数 $g(x)=\sqrt{1+2x}-1-x,-\frac{1}{2}<x<$

0，则 $g'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1+2x}}-1>0$，即 $g(x)$ 在

$\left(-\dfrac{1}{2},0\right)$ 上单调递增，

所以 $g(x)<g(0)=0$，

故 $f'(x)<0$ 在区间 $\left(-\dfrac{1}{2},0\right)$ 上恒成立，则 $f(x)$ 在 $\left(-\dfrac{1}{2},0\right)$ 上单调递减，

所以 $f(x)>f(0)=0$，由函数的单调性可知 $f(-0.44)>f(-0.33)>0$. **故选 B.**

8. A 【解析】因为 $f(x)=\sqrt{1-(|x|-1)^2}\geqslant 0$，$g(x)=-3\cdot\sqrt{1-\sqrt{\dfrac{|x|}{2}}}\leqslant 0$，

所以函数 $g(x)$ 对应"心形线"中 x 轴及下方的图象，

由 $g(x)=-3\sqrt{1-\sqrt{\dfrac{|x|}{2}}}$ 得 $1-\sqrt{\dfrac{|x|}{2}}\geqslant 0$，所以 $-2\leqslant x\leqslant 2$.

由题图可知函数 $g(x)$ 在 $(0,2)$ 上单调递增，可得 $g'(x)>0$，**故排除 B，C，**

又函数 $g(x)$ 在 $x>0$ 时的图象的切线斜率先减小后增大，**排除 D，**

故只有 A **选项符合题意. 故选 A.**

9. $\left(-\infty,-\dfrac{1}{2}\right]$ 【解析】因为 $f(x)=\dfrac{e^x-1}{e^x+1}+ax$ 在 $[-1,+\infty)$ 上单调递减，所以 $f'(x)\leqslant 0$ 且不恒为 0 在 $[-1,+\infty)$ 上恒成立，所以 $f'(x)=\dfrac{2e^x}{(e^x+1)^2}+a\leqslant 0$ 在 $[-1,+\infty)$ 上恒成立，

所以 $a\leqslant -\dfrac{2e^x}{(e^x+1)^2}$ 在 $[-1,+\infty)$ 上恒成立，令 $g(x)=-\dfrac{2e^x}{(e^x+1)^2}(x\geqslant -1)$，

则 $g(x)=-\dfrac{2e^x}{(e^x+1)^2}=-\dfrac{2}{e^x+\dfrac{1}{e^x}+2}\geqslant$

$-\dfrac{2}{2+2}=-\dfrac{1}{2}$，

当且仅当 $e^x=\frac{1}{e^x}$，即 $x=0$ 时等号成立，

所以 $a\leqslant-\frac{1}{2}$，即实数 a 的取值范围为 $\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right]$.

方法总结 **已知 $f(x)$ 在区间 (a,b) 上的单调性求参数范围的方法**

(1)利用集合的包含关系处理 $f(x)$ 在 (a,b) 上单调递增(减)的问题，则区间 (a,b) 是相应单调区间的子集.

(2)利用不等式恒成立处理 $f(x)$ 在 (a,b) 上单调递增(减)的问题，即 $f'(x)\geqslant0$ $(f'(x)\leqslant0)$ 且不恒为 0，在 (a,b) 内恒成立，注意验证等号是否成立.

10.【解】 $f(x)=2\ln x-x+\frac{a}{x}(x>0)$，则

$f'(x)=\frac{2}{x}-1-\frac{a}{x^2}=\frac{-x^2+2x-a}{x^2}$.

对于方程 $-x^2+2x-a=0$，$\Delta=4-4a$.

当 $\Delta=4-4a\leqslant0$，即 $a\geqslant1$ 时，$-x^2+2x-a\leqslant0$，$f'(x)\leqslant0$，函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减.

当 $\Delta=4-4a>0$，即 $0<a<1$ 时，方程 $-x^2+2x-a=0$ 有两个不等实根，

$x_1=1+\sqrt{1-a}$，$x_2=1-\sqrt{1-a}$，且 $x_1>x_2>0$，

所以当 $x>x_1$ 或 $0<x<x_2$ 时，$f'(x)<0$，

当 $x_2<x<x_1$ 时，$f'(x)>0$，

即函数 $f(x)$ 在 $(0,1-\sqrt{1-a})$，$(1+\sqrt{1-a},+\infty)$ 上单调递减，在 $(1-\sqrt{1-a},1+\sqrt{1-a})$ 上单调递增.

综上所述，当 $a\geqslant1$ 时，函数 $f(x)$ 的单调递减区间为 $(0,+\infty)$，无单调递增区间；当 $0<a<1$ 时，函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(1-\sqrt{1-a},1+\sqrt{1-a})$，单

调递减区间为$(0,1-\sqrt{1-a})$，$(1+\sqrt{1-a},+\infty)$.

6.2 函数的极值

对点上分

1. BCD 【解析】由题图知，当$x<-3$时，$f'(x)>0$，即$f(x)$在$(-\infty,-3)$上单调递增，

当$-3<x<-1$时，$f'(x)<0$，即$f(x)$在$(-3,-1)$上单调递减，故$f(-2)>f(-1)$，

当$x>-1$时，$f'(x)\geqslant 0$且仅有$f'(1)=0$，即$f(x)$在$(-1,+\infty)$上单调递增，易知$f(x)$在$(-1,1)$上单调递增，

所以$f(x)$有两个极值点，其中-3是极大值点，-1是极小值点.

故选 BCD.

易错警示 满足导数等于0时自变量的取值不一定是极值点，导函数的变号零点才是原函数的极值点. 例如本题中1不是$f(x)$的极值点，因为导函数在$x=1$附近的函数值正负没有改变.

2. BC 【解析】由题图知，当$x\in(-\infty,-2)$时，$g(x)>0$，所以$f'(x)<0$，

当$x\in(-2,0)$时，$g(x)<0$，所以$f'(x)>0$，

当$x\in(0,1)$时，$g(x)<0$，所以$f'(x)<0$，

当$x\in(1,+\infty)$时，$g(x)>0$，所以$f'(x)>0$.

所以$f(x)$在$(-\infty,-2)$，$(0,1)$上单调递减，在$(-2,0)$，$(1,+\infty)$上单调递增，

所以$f(x)$有三个极值点，$f(0)$为$f(x)$的极大值，$f(-2)$和$f(1)$为$f(x)$的极小值.

故 A,D 错误,B,C 正确. 故选 BC.

3. A

攻略上分 可利用通法攻略 20,确定已知函数的极值点.

【解析】由 $f(x)=\ln x-2x$ 可得 $f'(x)=\frac{1}{x}-2=\frac{1-2x}{x}(x>0)$,

当 $0<x<\frac{1}{2}$ 时,$f'(x)>0$,所以 $f(x)$ 在 $\left(0,\frac{1}{2}\right)$ 上单调递增,

当 $x>\frac{1}{2}$ 时,$f'(x)<0$,所以 $f(x)$ 在 $\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$ 上单调递减,

故 $\frac{1}{2}$ 为 $f(x)$ 的极大值点,**故选 A.**

4. BC

攻略上分 可利用通法攻略 20,确定含参函数的极值点.

【解析】由题可得 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$,

$f'(x)=(x^2-2x)^m+mx(x^2-2x)^{m-1}(2x-2)=(x^2-2x)^{m-1}\cdot[(2m+1)x^2-(2m+2)x]$.

当 m 为奇数时,$(x^2-2x)^{m-1}\geqslant 0$,令 $g(x)=(2m+1)x^2-(2m+2)x$,$g(0)=g\left(\frac{2m+2}{2m+1}\right)=0$,$g(2)\neq 0$,又 $m\in\mathbf{N}_+$,

所以当 $x\in(-\infty,0)$ 时,$g(x)>0$,$f'(x)>0$,$f(x)$ 单调递增,

当 $x\in\left(0,\frac{2m+2}{2m+1}\right)$ 时,$g(x)<0$,$f'(x)<0$,$f(x)$ 单调递减,

当 $x\in\left(\frac{2m+2}{2m+1},+\infty\right)$ 时,$g(x)>0$,$f'(x)>0$,$f(x)$ 单调递增,

所以 0 是 $f(x)$ 的极大值点,2 不是 $f(x)$ 的极小值点,**A 错误,B 正确.**

当 m 为偶数时,$f'(x)=(x^2-2x)^{m-1}\cdot[(2m+1)x^2-(2m+2)x]=x^m(x-2)^{m-1}[(2m+1)x-(2m+2)]$,

$x^m \geqslant 0$，又 $m \in \mathbf{N}_+$，所以 $0<\frac{2m+2}{2m+1}=1+\frac{1}{2m+1}<2$，

当 $x \in \left(-\infty, \frac{2m+2}{2m+1}\right)$ 时，$f'(x) \geqslant 0$ 且仅有 $f'(0)=0$，$f(x)$ 单调递增，

当 $x \in \left(\frac{2m+2}{2m+1}, 2\right)$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减，

当 $x \in (2,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增，所以 2 是 $f(x)$ 的极小值点，0 不是 $f(x)$ 的极大值点，C **正确**，D **错误**.

故选 BC.

5. 3

攻略上分 可利用通法攻略 20，确定已知函数的极值点.

【**解析**】$f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，$f'(x)=3x^2e^{2-x}-x^3e^{2-x}=(3-x)x^2e^{2-x}$，所以 $f'(3)=0$，

在区间 $(-\infty, 3)$ 上，$f'(x) \geqslant 0$ 且仅有 $f'(0)=0$，$f(x)$ 单调递增，在区间 $(3,+\infty)$ 上，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减，

所以 3 是 $f(x)$ 的极大值点，无极小值点. 故极值点为 3.

易错警示 极值点是取得极值时自变量的取值，极值点不是点.

6. **攻略上分** 函数中含有参数，需要对参数进行分类讨论，从而研究函数的极值.

【**解**】由题知 $f'(x)=\frac{1}{x}-a(x>0)$，

当 $a \leqslant 0$ 时，$f'(x)=\frac{1}{x}-a>0$ 恒成立，此时函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，此时函数 $f(x)$ 无极值；

当 $a>0$ 时，令 $f'(x)=\frac{1}{x}-a>0$，解得 $0<x<\frac{1}{a}$，令 $f'(x)=\frac{1}{x}-a<0$，解得 $x>\frac{1}{a}$，所以 $f(x)$ 在 $\left(0, \frac{1}{a}\right)$ 上单调递增，

在$\left(\frac{1}{a},+\infty\right)$上单调递减，

此时$f(x)$的极大值为$f\left(\frac{1}{a}\right)=-\ln a-3$，无极小值.

综上所述，当$a\leqslant 0$时，函数$f(x)$无极值，当$a>0$时，$f(x)$的极大值为$f\left(\frac{1}{a}\right)=-\ln a-3$，无极小值.

7. **思路导引** (1)求出$f(x)$的定义域为$(0,1)\cup(1,+\infty)$，然后求导得$f'(x)=\ln x-\frac{2}{x-1}-1$，令$g(x)=f'(x)$，再结合导数知识可求解.

(2)由(1)可得$f'\left(\frac{1}{e^2}\right)<0$，$f'\left(\frac{1}{e}\right)>0$，从而$\exists x_1\in\left(\frac{1}{e^2},\frac{1}{e}\right)$，使$f'(x_1)=0$，又$f'(e)<0$，$f'(e^2)>0$，从而$\exists x_2\in(e,e^2)$，使$f'(x_2)=0$，再结合导数极值知识即可求解.

(3)由(2)知x_1,x_2是函数$f'(x)$的零点，利用$f'\left(\frac{1}{x_1}\right)=f'(x_1)$，即可求解.

【解】(1)$f(x)$的定义域为$(0,1)\cup(1,+\infty)$，

当$x\in(0,1)$时，$f(x)=x\ln x-2\ln(1-x)-2x$，$f'(x)=\ln x-\frac{2}{x-1}-1$，

当$x\in(1,+\infty)$时，$f(x)=x\ln x-2\ln(x-1)-2x$，

则$f'(x)=\ln x-\frac{2}{x-1}-1$，

综上可得$f'(x)=\ln x-\frac{2}{x-1}-1$.

令$g(x)=f'(x)$，则$g'(x)=\frac{1}{x}+\frac{2}{(x-1)^2}>0$恒成立，

所以$f'(x)$在$(0,1)$，$(1+\infty)$上单调递增.

(2)因为$f'\left(\frac{1}{e^2}\right)=-3-\frac{2}{\frac{1}{e^2}-1}=\frac{3-e^2}{e^2-1}<0$，$f'\left(\frac{1}{e}\right)=-2-\frac{2}{\frac{1}{e}-1}=\frac{2}{e-1}>0$，

所以$\exists x_1\in\left(\frac{1}{e^2},\frac{1}{e}\right)$，使$f'(x_1)=0$，

当$x\in(0,x_1)$时，$f'(x)<0$，函数$f(x)$单调递减；

当$x\in(x_1,1)$时，$f'(x)>0$，函数$f(x)$单调递增，

所以$f(x)$在$(0,1)$上有一个极小值点x_1.

因为$f'(e)=-\frac{2}{e-1}<0$，$f'(e^2)=1-\frac{2}{e^2-1}=\frac{e^2-3}{e^2-1}>0$，

所以$\exists x_2\in(e,e^2)$，使$f'(x_2)=0$，

当$x\in(1,x_2)$时，$f'(x)<0$，函数$f(x)$单调递减；

当$x\in(x_2,+\infty)$时，$f'(x)>0$，函数$f(x)$单调递增，

所以$f(x)$在$(1,+\infty)$上有一个极小值点x_2，

所以$f(x)$在其定义域上存在两个极值点.

(3)由(2)知x_1,x_2是函数$f'(x)$的零点，

所以$f'(x_1)=\ln x_1-\frac{2}{x_1-1}-1=0$，

所以$f'\left(\frac{1}{x_1}\right)=-\ln x_1-\frac{2}{\frac{1}{x_1}-1}-1=-\ln x_1-\frac{2x_1}{1-x_1}-1=-\ln x_1+\frac{2}{x_1-1}+1=0$，

所以$f'(x_1)=f'\left(\frac{1}{x_1}\right)$.

因为$x_1\in(0,1)$，所以$\frac{1}{x_1}\in(1,+\infty)$，

又$f'(x)$在$(0,1)$，$(1,+\infty)$上各存在一个零点，分别为x_1,x_2，

所以 $x_2=\frac{1}{x_1}$，即 $x_1x_2=1$，所以 $f(x)$ 所有极值点的乘积为 1.

8. A 【解析】由题知 $f'(x)=ax^2-2x+a^2$，$x\in\mathbf{R}$，$\because f(x)$ 在 $x=1$ 处取得极大值，

$\therefore f'(1)=a-2+a^2=0$，解得 $a=-2$ 或 $a=1$，

当 $a=-2$ 时，$f'(x)=-2x^2-2x+4=-2(x+2)(x-1)$，

当 $x\in(-2,1)$ 时，$f'(x)=-2(x+2)(x-1)>0$，$\therefore f(x)$ 在区间 $(-2,1)$ 上单调递增；

当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$f'(x)=-2(x+2)(x-1)<0$，$\therefore f(x)$ 在区间 $(1,+\infty)$ 上单调递减，

此时 $f(x)$ 在 $x=1$ 处取得极大值，满足题意，

当 $a=1$ 时，$f'(x)=x^2-2x+1=(x-1)^2\geqslant 0$ 且不恒为 0，则 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增，不符合题意，故舍去.

$\therefore a=-2$. **故选 A.**

易错警示 由导数在极值点处的函数值为零可求参数的值，但是导函数的零点不一定是极值点，所以此类题目一定要将所得参数值代回题中检验，才可得正确的参数值.

9. A 【解析】由题知，当 $a=0$ 时，不符合题意，所以 $a\neq 0$，令 $f'(x)=\frac{1}{x+1}-2ax=0$，可得 $\frac{1}{2a}=x(x+1)$.

函数 $f(x)=\ln(x+1)-ax^2(x>-1)$ 有两个极值点，

即方程 $\frac{1}{2a}=x(x+1)$ 在 $x\in(-1,+\infty)$ 内有两个不等实根，

令 $g(x)=x(x+1)$，$x\in(-1,+\infty)$，

即函数 $g(x)=x(x+1)$ 的图象与直线 $y=\frac{1}{2a}$ 在 $x\in(-1,+\infty)$ 上有两个交点，

因为 $g(x)=x(x+1)=x^2+x=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}$，$g(-1)=0$，$g\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{4}$，

所以 $\frac{1}{2a}\in\left(-\frac{1}{4},0\right)$，所以 $a\in(-\infty,-2)$. **故选** A.

10. D 【解析】易知函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，则 $f'(x)=2x\ln x+x-2ax+2a-1$，

易知无论 a 为何值，$f'(1)=0$ 恒成立，

若 $f(x)$ 在 $x=1$ 处取得极大值，

则在 $x=1$ 附近的左侧，$f'(x)>0$，在 $x=1$ 附近的右侧，$f'(x)<0$，

因此可知 $f'(x)$ 在 $x=1$ 附近的值自左向右从正变为负.

令 $g(x)=2x\ln x+x-2ax+2a-1$，

则 $g'(x)=2\ln x+3-2a$，

所以 $g'(1)=2\ln 1+3-2a<0$，

因此可得 $a>\frac{3}{2}$. **故选** D.

11. ABD 【解析】函数 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+1\ (a\neq 0)$，求导得 $f'(x)=3ax^2+2bx+c$，

由 $\begin{cases}f'(1)=0,\\ f(1)=1\end{cases}$ 得 $\begin{cases}3a+2b+c=0,\\ a+b+c=0,\end{cases}$

解得 $\begin{cases}b=-2a,\\ c=a,\end{cases}$ 故 $f'(x)=3ax^2-4ax+a=a(3x-1)(x-1)$，

当 $a>0$ 时，令 $f'(x)<0$，解得 $\frac{1}{3}<x<1$，

令 $f'(x)>0$，解得 $x<\frac{1}{3}$ 或 $x>1$，所以 1 是 $f(x)$ 的极小值点，不符合题意.

当 $a<0$ 时，令 $f'(x)<0$，解得 $x<\frac{1}{3}$ 或

$x>1$，令 $f'(x)>0$，解得 $\frac{1}{3}<x<1$，

因此 $\frac{1}{3}$ 是 $f(x)$ 的极小值点，1 是 $f(x)$ 的极大值点，符合题意，**故 A，B，D 正确，C 错误.**

故选 ABD.

12.【解】(1) 因为 $f(x)=\ln x-\frac{a}{x}$，所以 $f'(x)=\frac{1}{x}+\frac{a}{x^2}$，所以 $f'(1)=1+a$，

又 $f(1)=-a$，所以函数 $f(x)$ 的图象在 $x=1$ 处的切线方程为 $y+a=(1+a)(x-1)$，

因为切线经过点 $(0,1)$，所以 $1+a=(1+a)(0-1)$，解得 $a=-1$.

(2) 由(1)知，$f'(x)=\frac{1}{x}+\frac{a}{x^2}=\frac{x+a}{x^2}$，函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，

当 $a\geqslant 0$ 时，$f'(x)>0$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立，

所以 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，无极值.

当 $a<0$ 时，令 $f'(x)=0$，得 $x=-a$，

所以当 $0<x<-a$ 时，$f'(x)<0$，函数 $f(x)$ 在 $(0,-a)$ 上单调递减，

当 $x>-a$ 时，$f'(x)>0$，函数 $f(x)$ 在 $(-a,+\infty)$ 上单调递增，

所以当 $x=-a$ 时，函数 $f(x)$ 有极小值，极小值为 $f(-a)=\ln(-a)+1$，

由 $\ln(-a)+1>2$，得 $a<-e$，所以 a 的取值范围为 $(-\infty,-e)$.

能力上分

1. A　【解析】对于 A，函数的极大值可以小于该函数的极小值，故该选项是正确的；

对于 B，函数 $y=-\frac{1}{x}$ 的单调递增区间为 $(-\infty,0)$，$(0,+\infty)$，不能用并集符

号连接两段单调区间,故该选项是错误的;

对于 C,若函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 附近左、右两侧的导数值符号不变,则 x_0 不是函数的极值点,故该选项是错误的;

对于 D,函数 $f(x)=xe^x$,$f'(x)=e^x+xe^x=e^x(x+1)$,当 $x\in(-\infty,-1)$ 时,$f'(x)<0$,$f(x)$ 单调递减,当 $x\in(-1,+\infty)$ 时,$f'(x)>0$,$f(x)$ 单调递增,所以 $f(x)$ 的极小值点是 -1,

提示:极值点不是点,所以可以直接排除

故该选项是错误的. **故选** A.

2. D 【解析】易得 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$,且 $f(x)$ 为奇函数,

故 $f(-x)=(-x)^3+(a-1)(-x)^2+(a-4)(-x)=-x^3+(a-1)x^2+(4-a)x=-f(x)$,可得 $a=1$,

故 $f(x)=x^3-3x$,$f'(x)=3x^2-3$,

令 $f'(x)>0$,解得 $x>1$ 或 $x<-1$;令 $f'(x)<0$,解得 $-1<x<1$,

则 $f(x)$ 在 $(-\infty,-1)$,$(1,+\infty)$ 上单调递增,在 $(-1,1)$ 上单调递减,故 $f(x)$ 的极小值是 $f(1)=-2$.

故选 D.

3. B 【解析】函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$,$f'(x)=3x^2-2ax+2$,

因为 $f(x)$ 有极值,所以函数 $f'(x)$ 有变号零点,即 $f'(x)=0$ 有 2 个不相等的实数根,所以 $\Delta=4a^2-24>0$,解得 $a\in(-\infty,-\sqrt{6})\cup(\sqrt{6},+\infty)$.

故选 B.

4. B 【解析】由题意知 $f(x)=\ln(2x)+\frac{a}{x}+2x$ 的定义域为 $(0,+\infty)$,

则 $f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{a}{x^2}+2=\frac{2x^2+x-a}{x^2}$,

由 $f(x)=\ln(2x)+\frac{a}{x}+2x$ 存在大于 1

的极值点，可知方程 $f'(x)=0$ 存在大于 1 的根，

即方程 $2x^2+x-a=0$ 存在大于 1 的解，

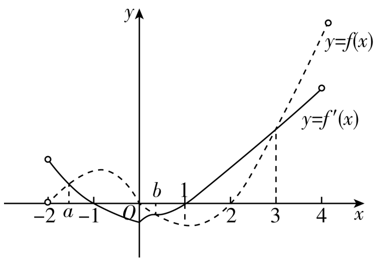
即 $a=2x^2+x$ 存在大于 1 的解，

而当 $x>1$ 时，$y=2x^2+x$ 随 x 的增大而增大，故 $y>3$，故 $a>3$，**故选 B.**

5. C 【解析】由题图可知，若虚线表示的是函数 $f'(x)$ 的图象，

当 $x\in(-2,0)$ 时，$f'(x)>0$，则 $f(x)$ 在 $(-2,0)$ 上单调递增，与题意不符，

故虚线表示的是函数 $f(x)$ 的图象，实线表示的是函数 $f'(x)$ 的图象，如图所示.



因为 $g(x)=\dfrac{f(x)}{e^x}$，

则 $g'(x)=\dfrac{f'(x)-f(x)}{e^x}$，

由图可知，当 $-2<x<a$ 时，$g'(x)=\dfrac{f'(x)-f(x)}{e^x}>0$；

当 $a<x<b$ 时，$g'(x)=\dfrac{f'(x)-f(x)}{e^x}<0$；

当 $b<x<3$ 时，$g'(x)=\dfrac{f'(x)-f(x)}{e^x}>0$；

当 $3<x<4$ 时，$g'(x)=\dfrac{f'(x)-f(x)}{e^x}<0$.

所以函数 $g(x)$ 在 $(-2,a)$，$(b,3)$ 上单调递增，在 (a,b)，$(3,4)$ 上单调递减，

故函数 $g(x)$ 在区间 $(-2,4)$ 上有 2 个极大值点，**故选 C.**

6. 2 【解析】因为 $f(x)=x^3-3x^2+x$，所以 $f'(x)=3x^2-6x+1$，

令 $f'(x)=0$，得 $3x^2-6x+1=0$，解得 $x_1=1-\dfrac{\sqrt{6}}{3}$，$x_2=1+\dfrac{\sqrt{6}}{3}$，

当 $x\in\left(-\infty,1-\frac{\sqrt{6}}{3}\right)$ 时，$f'(x)>0$，当 $x\in\left(1-\frac{\sqrt{6}}{3},1+\frac{\sqrt{6}}{3}\right)$ 时，$f'(x)<0$，当 $x\in\left(1+\frac{\sqrt{6}}{3},+\infty\right)$ 时，$f'(x)>0$，

即 $f(x)=x^3-3x^2+x$ 在区间 $\left(-\infty,1-\frac{\sqrt{6}}{3}\right)$ 上单调递增，

在区间 $\left(1-\frac{\sqrt{6}}{3},1+\frac{\sqrt{6}}{3}\right)$ 上单调递减，

在区间 $\left(1+\frac{\sqrt{6}}{3},+\infty\right)$ 上单调递增，

所以 $1-\frac{\sqrt{6}}{3}$ 是 $f(x)$ 的极大值点，$1+\frac{\sqrt{6}}{3}$ 是 $f(x)$ 的极小值点，

所以 $m+n=x_1+x_2=2$.

7.【解】(1)当 $a=-1$ 时，$f(x)=\ln x+x-2$，

$f'(x)=\frac{1}{x}+1$，

则 $f'(1)=2$，又 $f(1)=\ln 1+1-2=-1$，

所以曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程为 $y+1=2(x-1)$，

即为 $2x-y-3=0$.

(2)$f'(x)=\frac{1}{x}-a$，$x>0$，

当 $a\leqslant 0$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增，无极值，不符合题意，

当 $a>0$ 时，令 $f'(x)>0$，解得 $0<x<\frac{1}{a}$，

令 $f'(x)<0$，解得 $x>\frac{1}{a}$，

所以 $f(x)$ 在 $\left(0,\frac{1}{a}\right)$ 上单调递增，在 $\left(\frac{1}{a},+\infty\right)$ 上单调递减，

所以 $\frac{1}{a}$ 是 $f(x)$ 的极大值点，

所以 $f(x)$ 的极大值为 $f\left(\frac{1}{a}\right)=\ln\frac{1}{a}+a\left(2-\frac{1}{a}\right)=2a-1-\ln a$.

因为 $f(x)$ 的极大值小于 $3a-2$，所以

$2a-1-\ln a<3a-2$，即 $a+\ln a-1>0$，

设 $g(x)=x+\ln x-1(x>0)$，

易知函数 $g(x)=x+\ln x-1$ 在 $(0,+\infty)$ 上是增函数，又 $g(1)=0$，

所以由 $g(a)>0$ 得 $a>1$，即 a 的取值范围是 $(1,+\infty)$.

6.3 函数的最值

对点上分

1. D 【解析】因为 $f'(x)=6x^2-6$，令 $f'(x)=0$，解得 $x=\pm1$，当 $x\in(-2,-1)$ 时，$f'(x)>0$，则 $f(x)$ 单调递增，当 $x\in(-1,1)$ 时，$f'(x)<0$，则 $f(x)$ 单调递减，所以当 $x=-1$ 时，$f(x)$ 在区间 $[-2,1]$ 上有最大值，最大值为 $f(-1)=4$. **故选 D.**

2. C 【解析】由 $f(x)=xe^x$，得 $f'(x)=e^x+xe^x=e^x(x+1)$，令 $f'(x)=0$，解得 $x=-1$，

当 $x\in(-\infty,-1)$ 时，$f'(x)<0$，函数 $f(x)$ 单调递减，

当 $x\in(-1,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，函数 $f(x)$ 单调递增，

所以当 $x=-1$ 时，函数有最小值，最小值为 $f(-1)=-1\cdot e^{-1}=-\dfrac{1}{e}$. **故选 C.**

3. A 【解析】由 $f(x)=x+2\cos x$，得 $f'(x)=1-2\sin x$，

当 $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{6}\right)$ 时，$\sin x\in\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$，可得 $f'(x)>0$，则 $f(x)$ 在 $\left(0,\dfrac{\pi}{6}\right)$ 上单调递增；

当 $x\in\left(\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{2}\right)$ 时，$\sin x\in\left(\dfrac{1}{2},1\right)$，可得 $f'(x)<0$，则 $f(x)$ 在 $\left(\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{2}\right)$ 上单调递减，所以当 $x=\dfrac{\pi}{6}$ 时，$f(x)$ 有极大值. 由 $f(0)=2$，$f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{\pi}{2}$，得 $f(x)$ 的

最小值为$\frac{\pi}{2}$. **故选 A.**

4. AD 【解析】由题图可得当 $x\in(-\infty,-2)$时,$f'(x)<0$,

当 $x\in(-2,+\infty)$时,$f'(x)\geqslant0$,当且仅当 $x=1$ 时 $f'(x)=0$,

所以函数 $f(x)$ 在$(-\infty,-2)$上单调递减,在$(-2,+\infty)$上单调递增,

所以-2 是函数 $f(x)$ 的极小值点,且函数 $f(x)$ 在区间$(-2,2)$上单调递增,**故 A,D 正确**,

函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处不能取最小值,曲线 $y=f(x)$ 在 $x=0$ 处的切线的斜率大于 0,**故 B,C 错误.**

故选 AD.

5. $a-a\ln a$

思路导引 可以利用隐零点方法:利用导数求得函数 $f(x)$ 的单调性由关键函数 $g(x)=xe^x-a(x>0)$的正负决定,对 $g(x)$ 求导可得其在定义域内单调递增,根据零点存在定理,得 $g(x)$ 在$(0,a)$上存在唯一的零点 x_0,即可判断 $f(x)$ 的单调区间,进而求出 $f(x)$ 的最小值.

也可以利用同构变形方法:由 $x=\ln e^x$ 可将 $f(x)=xe^x-a(\ln x+x)$ 整理成 $f(x)=xe^x-a\ln(xe^x)$,进而用换元法构造函数 $\varphi(t)=t-a\ln t,t>0$,再利用导数求出最小值即可.

【解析】函数 $f(x)$ 的定义域为$(0,+\infty)$,求导得 $f'(x)=(x+1)\left(e^x-\frac{a}{x}\right)=\frac{x+1}{x}(xe^x-a)$,

令 $g(x)=xe^x-a,x>0$,求导得 $g'(x)=(x+1)e^x>0$,所以函数 $g(x)$ 在$(0,+\infty)$上单调递增,

由 $g(0)=-a<0,g(a)=ae^a-a>0$,得 $g(x)$ 在$(0,a)$上存在唯一的零点 x_0,

即 $x_0e^{x_0}=a$，又 $\frac{x+1}{x}>0$，

于是当 $0<x<x_0$ 时，$f'(x)<0$，当 $x>x_0$ 时，$f'(x)>0$，所以 $f(x)$ 在 $(0,x_0)$ 上单调递减，在 $(x_0,+\infty)$ 上单调递增，所以 $f(x)_{\min}=f(x_0)=x_0e^{x_0}-a(\ln x_0+x_0)=x_0e^{x_0}-a\ln(x_0e^{x_0})=a-a\ln a$.

一题多解 依题意，$f(x)=xe^x-a(\ln x+\ln e^x)=xe^x-a\ln(xe^x)$，令 $t=xe^x$，$t>0$，

设 $\varphi(t)=t-a\ln t$，$t>0$，求导得 $\varphi'(t)=1-\frac{a}{t}=\frac{t-a}{t}$，

当 $t\in(0,a)$ 时，$\varphi'(t)<0$，当 $t\in(a,+\infty)$ 时，$\varphi'(t)>0$，

所以函数 $\varphi(t)$ 在 $(0,a)$ 上单调递减，在 $(a,+\infty)$ 上单调递增，则 $\varphi(t)_{\min}=\varphi(a)=a-a\ln a$，

所以 $f(x)$ 的最小值为 $a-a\ln a$.

6.【解】(1) 函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，

当 $a=1$ 时，$f(x)=\ln x-x$，

则 $f'(x)=\frac{-x+1}{x}$，$x>0$，

令 $f'(x)>0$，解得 $0<x<1$，

令 $f'(x)<0$，解得 $x>1$，

所以 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(0,1)$，单调递减区间为 $(1,+\infty)$.

(2) $f'(x)=\frac{a}{x}-1=\frac{-x+a}{x}$，$x>0$，令 $f'(x)=0$，解得 $x=a$.

①若 $0<a<2$，

当 $0<x<a$ 时，$f'(x)>0$，所以 $f(x)$ 在区间 $(0,a)$ 上单调递增，

当 $a<x\leqslant 2$ 时，$f'(x)<0$，所以 $f(x)$ 在区间 $(a,2]$ 上单调递减，

所以 $f(x)_{\max}=f(a)=a\ln a-a$.

②若 $a\geqslant 2$，

当 $0<x\leqslant 2$ 时，$f'(x)\geqslant 0$ 且不恒为 0，

所以 $f(x)$ 在区间 $(0,2]$ 上单调递增,

所以 $f(x)_{\max}=f(2)=a\ln 2-2$.

综上所述,当 $0<a<2$ 时,$f(x)_{\max}=a\ln a-a$;

当 $a\geqslant 2$ 时,$f(x)_{\max}=a\ln 2-2$.

7. D 【解析】因为 $f(x)=e^x+ax+c$ $(a,c\in\mathbf{R})$,所以 $f'(x)=e^x+a$,

所以 $f'(0)=e^0+a=3$,解得 $a=2$,所以 $f(x)=e^x+2x+c$,$f'(x)=e^x+2$,

当 $x\in[0,1]$ 时,$f'(x)>0$,所以 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上单调递增,

所以 $f(x)_{\max}=f(1)=e+2+c=5$,解得 $c=3-e$. **故选** D.

方法总结 已知函数在某区间上的最值求参数的值(或取值范围)是求函数最值的逆向思维,一般先求导数,利用导数研究函数的单调性,然后根据已知最值列方程(或不等式)解决问题.

8. A 【解析】由 $f(x)=\dfrac{1}{3}x^3-\dfrac{a-1}{2}x^2+1$ 得 $f'(x)=x[x-(a-1)]$,令 $f'(x)=0$,得 $x=0$ 或 $x=a-1$,

当 $0<a\leqslant 1$ 时,$f(x)$ 在 $[0,a]$ 上单调递增,所以 $f(x)$ 的最小值为 $f(0)=1$,不符题意;

当 $a>1$ 时,$f(x)$ 在 $[0,a-1]$ 上单调递减,在 $[a-1,a]$ 上单调递增,

所以 $f(x)$ 的最小值为 $f(a-1)=1-\dfrac{1}{6}(a-1)^3$,令 $f(a-1)<-\dfrac{1}{3}$,解得 $a>3$. **故选** A.

9. D 【解析】函数 $f(x)=x+\dfrac{4}{x}+3\ln x$ 的定义域为 $(0,+\infty)$,求导得 $f'(x)=1-\dfrac{4}{x^2}+\dfrac{3}{x}=\dfrac{(x+4)(x-1)}{x^2}$,

当 $0<x<1$ 时,$f'(x)<0$,当 $x>1$ 时,$f'(x)>0$,

所以函数 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减，在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处取得极小值，也为最小值，

又函数 $f(x)$ 在 $(0,2-3a)$ 内有最小值，

则 $1<2-3a$，解得 $a<\frac{1}{3}$，

所以实数 a 的取值可以是 $\frac{1}{4}$. **故选 D.**

10. D 【解析】由题意可知 $f(b)=0\in[a,b]$，所以 $a<0,b\geqslant 0$，

若 $b=0$，则 $a<0$，可知 $f(x)=2ax^3$ 在 $[a,0]$ 内单调递减，

可得 $b=f(a)=2a^4>0$，不合题意，

故 $b\neq 0$，则 $a<0<b$.

易知 $f'(x)=2a(x-b)^2+4ax(x-b)=2a(x-b)(3x-b)(a\leqslant x\leqslant b)$，

令 $f'(x)>0$，解得 $\frac{b}{3}<x<b$；令 $f'(x)<0$，

解得 $a\leqslant x<\frac{b}{3}$，

则 $f(x)$ 在 $\left[a,\frac{b}{3}\right)$ 上单调递减，在 $\left(\frac{b}{3},b\right)$ 上单调递增，

则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 内的最小值为 $f\left(\frac{b}{3}\right)=\frac{8ab^3}{27}=a$，解得 $b=\frac{3}{2}$，

此时 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 内的最大值为 $f(a)=2a^2\left(a-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{3}{2}$，

且 $a<0$，可得 $a\left(a-\frac{3}{2}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$，即 $2a^2-3a-\sqrt{3}=0$，解得 $a=\frac{3-\sqrt{9+8\sqrt{3}}}{4}$（正值舍去）. **故选 D.**

11. D 【解析】由 $f(x)=4x^3-ax^2+3$ 可得 $f(0)=3$，

函数 $f(x)=4x^3-ax^2+3,x\in[0,2]$ 的导函数为 $f'(x)=12x^2-2ax=2x(6x-a)$，$x\in[0,2]$.

若 $a\leqslant 0$，则当 $0\leqslant x\leqslant 2$ 时，$f'(x)\geqslant 0$ 且不恒为 0，函数 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上单调递

增，$f(x)$的最大值为$f(2)>f(0)=3$，不符合题意.

若$0<a<12$，则当$0<x<\frac{a}{6}$时，$f'(x)<0$，

函数$f(x)$在$\left(0,\frac{a}{6}\right)$上单调递减，

当$\frac{a}{6}<x<2$时，$f'(x)>0$，函数$f(x)$在$\left(\frac{a}{6},2\right)$上单调递增，

由函数$f(x)=4x^3-ax^2+3$在$[0,2]$上的最大值为3，可得$f(2)\leqslant f(0)=3$，

所以$4\times8-4a+3\leqslant3$，又$0<a<12$，

所以$8\leqslant a<12$.

若$a\geqslant12$，则当$0\leqslant x\leqslant2$时，$f'(x)\leqslant0$且不恒为0，函数$f(x)$在$[0,2]$上单调递减，

函数$f(x)$在$[0,2]$上的最大值为$f(0)=3$，符合题意.

综上所述，实数a的取值范围是$[8,+\infty)$. **故选 D.**

12. $\left(-\infty,\frac{-(e-1)^2}{e}\right]$ 【**解析**】由题可知，$f(x)=e^x-x-1$，则$f'(x)=e^x-1$，

令$f'(x)>0$，解得$x>0$，令$f'(x)<0$，解得$x<0$，

所以$f(x)$在$\left[\frac{1}{e},1\right]$上单调递增，当$x\in\left[\frac{1}{e},1\right]$时，$f(x)_{\max}=f(1)=e-2$.

由$g(x)=a\ln x-x(a<0)$，得$g'(x)=\frac{a}{x}-1=\frac{a-x}{x}$，

因为$a<0$，所以$g'(x)<0$在$\left[\frac{1}{e},1\right]$上恒成立，

则$g(x)$在$\left[\frac{1}{e},1\right]$上单调递减，当$x\in\left[\frac{1}{e},1\right]$时，$g(x)_{\max}=g\left(\frac{1}{e}\right)=-a-\frac{1}{e}$.

由题意,对任意的 $x_1\in\left[\frac{1}{e},1\right]$,总存在 $x_2\in\left[\frac{1}{e},1\right]$,使得 $f(x_1)\leqslant g(x_2)$,

则 $e-2\leqslant -a-\frac{1}{e}$,则 $a\leqslant 2-e-\frac{1}{e}=\frac{-(e^2-2e+1)}{e}=-\frac{(e-1)^2}{e}$.

故 $a\leqslant -\frac{(e-1)^2}{e}$.

13.【解】(1)当 $a=1$ 时,$f(x)=3\ln x-x^3+4$,该函数的定义域为 $(0,+\infty)$,

且 $f'(x)=\frac{3}{x}-3x^2=\frac{3-3x^3}{x}$,

由 $f'(x)>0$,得 $0<x<1$,由 $f'(x)<0$,得 $x>1$,

则 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增,在 $(1,+\infty)$ 上单调递减,

故 $f(x)$ 的最大值为 $f(1)=-1+4=3$.

(2)$f(x)\leqslant 0$ 对任意的 $x>0$ 恒成立,等价于 $a\geqslant\frac{3\ln x+4}{x^3}$ 对任意的 $x>0$ 恒成立.

设 $g(x)=\frac{3\ln x+4}{x^3}$,$x>0$,

则 $g'(x)=\frac{-9-9\ln x}{x^4}$,

由 $g'(x)>0$,得 $0<x<\frac{1}{e}$,由 $g'(x)<0$,得 $x>\frac{1}{e}$,

则 $g(x)$ 在 $\left(0,\frac{1}{e}\right)$ 上单调递增,在 $\left(\frac{1}{e},+\infty\right)$ 上单调递减,

从而 $g(x)_{\max}=g\left(\frac{1}{e}\right)=\frac{3\ln\frac{1}{e}+4}{\left(\frac{1}{e}\right)^3}=e^3$,

故 $a\geqslant e^3$,

即实数 a 的取值范围是 $[e^3,+\infty)$.

能力上分

1. D 【解析】$f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$,

且 $f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{2}{x^3}=\frac{x^2-2}{x^3}$,

令 $f'(x)>0$ 得 $x>\sqrt{2}$,令 $f'(x)<0$ 得 $0<x<\sqrt{2}$,

则 $f(x)$ 在 $(0,\sqrt{2})$ 上单调递减,在 $(\sqrt{2},+\infty)$ 上单调递增,所以 $f(x)$ 的最小值为 $f(\sqrt{2})=\frac{1+\ln 2}{2}$.

故选 D.

2. A 【解析】$\exists x_1,x_2\in\mathbf{R}$,使得 $f(x_2)<g(x_1)$ 成立,则 $f(x)_{\min}<g(x)_{\max}$.

因为 $f(x)=xe^x$,则 $f'(x)=e^x+xe^x=(x+1)e^x$,

令 $f'(x)=0$,则 $x=-1$,

当 $x<-1$ 时,$f'(x)<0$,当 $x>-1$ 时,$f'(x)>0$,

所以函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,-1)$ 上单调递减,在 $(-1,+\infty)$ 上单调递增,

所以 $f(x)_{\min}=f(-1)=-\frac{1}{e}$.

因为 $g(x)=-(x+1)^2+a$,则 $g(x)_{\max}=g(-1)=a$,所以 $a>-\frac{1}{e}$. **故选 A.**

3. C 【解析】由题意可知,两个函数图象都在 x 轴上方,则原函数应该单调递增,则虚线部分为 $y=f'(x)$ 的图象,实线部分为 $y=f(x)$ 的图象.

对于 A,B,令 $g(x)=f(x)\cdot e^x$,则 $g'(x)=f'(x)e^x+f(x)e^x=[f'(x)+f(x)]e^x>0$ 恒成立,

故 $g(x)=f(x)e^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增,则 **A,B 错误.**

对于 C,D,令 $m(x)=\frac{f(x)}{e^x}$,则 $m'(x)=\frac{f'(x)e^x-f(x)e^x}{(e^x)^2}=\frac{f'(x)-f(x)}{e^x}$,

由题图可知当 $x\in(-\infty,0)$ 时,

$m'(x)=\frac{f'(x)-f(x)}{e^x}>0$,

当 $x\in(0,+\infty)$ 时，$m'(x)=\dfrac{f'(x)-f(x)}{e^x}<0$，

所以 $m(x)=\dfrac{f(x)}{e^x}$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递增，在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，

所以函数 $m(x)=\dfrac{f(x)}{e^x}$ 在 $x=0$ 处取得极大值，也为最大值，且 $m(0)=\dfrac{f(0)}{e^0}=1$，C 正确，D 错误.

故选 C.

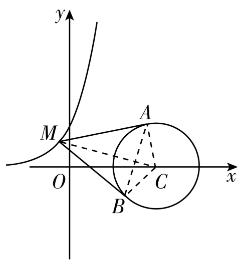
4. $\dfrac{4}{5}\pi$ 【解析】由已知可得 $C(2,0)$，设 $M(m,e^{2m})$，连接 MC，则 $|MC|^2=(m-2)^2+e^{4m}$，

设 $f(x)=(x-2)^2+e^{4x}$，则 $f'(x)=2(x-2)+4e^{4x}$，

因为 $y=2(x-2)$，$y=4e^{4x}$ 为 $\mathbf{R}$ 上的增函数，所以 $f'(x)$ 为 $\mathbf{R}$ 上的增函数，

当 $x>0$ 时，$f'(x)>0$，当 $x<0$ 时，$f'(x)<0$，故 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递减，在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

故 $f(x)_{\min}=f(0)=5$，故 $|MC|_{\min}=\sqrt{5}$，



连接 AB，CA，BC，

由等面积法可得 $\dfrac{1}{2}\times|AB|\times|MC|=2\times\dfrac{1}{2}\times|CA|\times|MA|$，故 $|AB|=2\dfrac{|MA|}{|MC|}=2\sqrt{\dfrac{|MC|^2-1}{|MC|^2}}=2\sqrt{1-\dfrac{1}{|MC|^2}}$，

故 $|AB|$ 的最小值为 $\dfrac{4\sqrt{5}}{5}$. 故圆 C' 的面积的最小值为 $\dfrac{4}{5}\pi$.

5. 4 【解析】因为 $f(x)=x^3-6x^2+9x$,

所以 $f'(x)=3x^2-12x+9=3(x-3)(x-1)$,令 $f'(x)=0$,可得 $x=1$ 或 $x=3$,

当 $x<1$ 时,$f'(x)>0$,函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,1)$ 上单调递增,

当 $1<x<3$ 时,$f'(x)<0$,函数 $f(x)$ 在 $(1,3)$ 上单调递减,

当 $x>3$ 时,$f'(x)>0$,函数 $f(x)$ 在 $(3,+\infty)$ 上单调递增,

所以当 $x=1$ 时,$f(x)$ 取得极大值,当 $x=3$ 时,函数 $f(x)$ 取得极小值,

所以 $a=1,b=3$,故 $a+b=4$,

又 $f(0)=0,f(1)=4,f(3)=0$,

当 $x>3$ 时,令 $f(x)=x^3-6x^2+9x=4$,可得 $x^3-4x^2-2x^2+9x-4=0$,

所以 $x^2(x-4)-(2x-1)(x-4)=0$,

故 $(x^2-2x+1)(x-4)=0$,解得 $x=4$ 或 $x=1$(舍去),

所以 m 的最大值为 4.

6. $(0,+\infty)$

思路导引 写出函数定义域并求导得 $f'(x)=xe^x(ax^2+3ax-1)$,令 $g(x)=ax^2+3ax-1$,分 $a=0$, $a=-\frac{4}{9}$, $-\frac{4}{9}<a<0$, $a>0$ 和 $a<-\frac{4}{9}$ 五种情况讨论,得到函数 $f(x)$ 的单调性,进而确定实数 a 的取值范围.

【解析】$f(x)=e^x(ax^3-x+1)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$,

$f'(x)=e^x(ax^3-x+1)+e^x(3ax^2-1)=e^x(ax^3+3ax^2-x)=xe^x(ax^2+3ax-1)$.

令 $g(x)=ax^2+3ax-1$,

(1) 若 $a=0$,则 $g(x)=-1<0$,令 $f'(x)>0$,得 $x<0$,令 $f'(x)<0$,得 $x>0$,

所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递增,在 $(0,+\infty)$ 上单调递减,

故 $f(x)$ 存在最大值,不存在最小值,舍去.

(2) 若 $a\neq 0$, 令 $g(x)=0$, 则 $\Delta=9a^2+4a$.

①若 $\Delta=0$, 则 $a=-\frac{4}{9}$, 此时 $g(x)=-\frac{4}{9}x^2-\frac{4}{3}x-1=-\frac{4}{9}\left(x^2+3x+\frac{9}{4}\right)=-\frac{4}{9}\left(x+\frac{3}{2}\right)^2\leqslant 0$,

又 $f'(x)=xe^x\cdot g(x)$, $f'\left(-\frac{3}{2}\right)=0$,

所以当 $x<0$ 且 $x\neq-\frac{3}{2}$ 时, $f'(x)=xe^x\cdot g(x)>0$, 当 $x>0$ 时, $f'(x)=xe^x\cdot g(x)<0$,

故 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递增, 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减,

故 $f(x)$ 存在最大值,不存在最小值,舍去.

②若 $\Delta<0$, 则 $-\frac{4}{9}<a<0$, 此时 $g(x)=ax^2+3ax-1<0$ 恒成立,

当 $x<0$ 时, $f'(x)=xe^x\cdot g(x)>0$, 当 $x>0$ 时, $f'(x)=xe^x\cdot g(x)<0$,

所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递增, 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减,

故 $f(x)$ 存在最大值,不存在最小值,舍去.

③若 $\Delta>0$, 则 $a>0$ 或 $a<-\frac{4}{9}$.

A. 当 $a>0$ 时, 设 $g(x)=ax^2+3ax-1$ 的两根分别为 $x_1=\frac{-3a-\sqrt{9a^2+4a}}{2a}$, $x_2=\frac{-3a+\sqrt{9a^2+4a}}{2a}$,

$g(x)=ax^2+3ax-1$ 的图象开口向上, $x_1<0<x_2$,

当 $x<x_1$ 时, $g(x)>0$, $f'(x)=xe^x(ax^2+3ax-1)<0$,

当 $x_1<x<0$ 时, $g(x)<0$, $f'(x)=$

$xe^x(ax^2+3ax-1)>0$,

当 $0<x<x_2$ 时, $g(x)<0$, $f'(x)=xe^x(ax^2+3ax-1)<0$,

当 $x>x_2$ 时, $g(x)>0$, $f'(x)=xe^x(ax^2+3ax-1)>0$,

所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,x_1)$ 上单调递减,在 $(x_1,0)$ 上单调递增,在 $(0,x_2)$ 上单调递减,在 $(x_2,+\infty)$ 上单调递增,

$\min\{f(x_1),f(x_2)\}$ 即为 $f(x)$ 的最小值,故 $a>0$ 满足要求.

B. 当 $a<-\dfrac{4}{9}$ 时,

$g(x)=ax^2+3ax-1$ 的图象开口向下,

$x_2<x_1<0$,

当 $x<x_2$ 时, $g(x)<0$, $f'(x)=xe^x(ax^2+3ax-1)>0$,

当 $x_2<x<x_1$ 时, $g(x)>0$,

$f'(x)=xe^x(ax^2+3ax-1)<0$,

当 $x_1<x<0$ 时, $g(x)<0$,

$f'(x)=xe^x(ax^2+3ax-1)>0$,

当 $x>0$ 时, $g(x)<0$,

$f'(x)=xe^x(ax^2+3ax-1)<0$,

所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,x_2)$ 上单调递增,

在 (x_2,x_1) 上单调递减,在 $(x_1,0)$ 上单调递增,

在 $(0,+\infty)$ 上单调递减,

当 x 趋向于 $+\infty$ 时, $f(x)=e^x(ax^3-x+1)$ 趋向于 $-\infty$,不存在最小值,舍去.

综上,实数 a 的取值范围为 $(0,+\infty)$.

7. **思路导引** 方程 $f(x)=t$ 在 $x\in[-1,2]$ 有解,转化成两函数 $y=t$ 与 $y=f(x)$ 的函数图象有交点,进而转化成 t 的范围等于 $y=f(x)$ 在区间 $[-1,2]$ 上的值域,所以本题只需求出 $y=f(x)$ 的最值.

【解】(1) $f'(x)=3x^2+2mx+n$,

由函数 $f(x)=x^3+mx^2+nx$ 的图象在点 $(1,2)$ 处的切线的斜率为 5,

可得$\begin{cases}3+2m+n=5,\\1+m+n=2,\end{cases}$解得$\begin{cases}m=1,\\n=0.\end{cases}$

(2)由(1)知,$f(x)=x^3+x^2$,$f'(x)=3x^2+2x=x(3x+2)$,

当$x\in[-1,2]$时,令$f'(x)>0$,解得$-1\leqslant x<-\frac{2}{3}$或$0<x\leqslant 2$,

令$f'(x)<0$,解得$-\frac{2}{3}<x<0$,

因此$f(x)$在$\left[-1,-\frac{2}{3}\right)$上单调递增,在$\left(-\frac{2}{3},0\right)$上单调递减,在$(0,2]$上单调递增,所以$-\frac{2}{3}$是函数$f(x)$的极大值点,极大值为$f\left(-\frac{2}{3}\right)=\frac{4}{27}$,

0是函数$f(x)$的极小值点,极小值为$f(0)=0$,

又因为$f(-1)=0$,$f(2)=12$,所以函数$f(x)$的最大值为12,最小值为0,

即函数$f(x)$的值域为$[0,12]$,所以实数t的取值范围为$[0,12]$.

§7 导数的应用

7.1 实际问题中导数的意义+

7.2 实际问题中的最值问题

对点上分

1. D 【解析】由导数的概念可知,$f'(3)$的实际意义是3秒时水管流水量的瞬时变化率. **故选** D.

2. D 【解析】由题意可知方盒的底面是边长为$20-2x$的正方形,方盒高为x,则$0<x<10$.

所以无盖方盒的容积$V(x)=x(20-2x)^2=4x^3-80x^2+400x$,$0<x<10$.

所以$V'(x)=12x^2-160x+400=4(x-10)(3x-10)$.

因为$x\in(0,10)$,令$V'(x)>0$,解得$0<x<\frac{10}{3}$;令$V'(x)<0$,解得$\frac{10}{3}<x<10$,

所以函数$V(x)$在$\left(0,\frac{10}{3}\right)$上单调递

增，在$\left(\frac{10}{3},10\right)$上单调递减，

所以$V(x)$在$x=\frac{10}{3}$处取得极大值，也是最大值，即当$x=\frac{10}{3}$时，方盒的容积最大. **故选 D.**

3. $\frac{352}{27}$ 【解析】由题图可知，$f(x)=k\sqrt{x}$的图象过点$B(4,4)$，即$2k=4$，解得$k=2$，$\therefore f(x)=2\sqrt{x}(0\leqslant x\leqslant 4)$.

由$B(4,4)$，$C(8,0)$得直线BC的方程为$y=\frac{4-0}{4-8}(x-8)=-x+8$.

设$E(x,2\sqrt{x})(0<x<4)$，

则$D(x,0)$，$F(8-2\sqrt{x},2\sqrt{x})$，

则直角梯形$CDEF$的面积$S=\frac{1}{2}\cdot(8-2\sqrt{x}-x+8-x)\cdot 2\sqrt{x}=16\sqrt{x}-2x\sqrt{x}-2x(0<x<4)$.

令$t=\sqrt{x}(0<t<2)$，则$S(t)=16t-2t^3-2t^2(0<t<2)$，$\therefore S'(t)=-6t^2-4t+16=-2(t+2)(3t-4)$，

$\therefore$当$t\in\left(0,\frac{4}{3}\right)$时，$S'(t)>0$；当$t\in\left(\frac{4}{3},2\right)$时，$S'(t)<0$，

$\therefore S(t)$在$\left(0,\frac{4}{3}\right)$上单调递增，在$\left(\frac{4}{3},2\right)$上单调递减，$\therefore S(t)_{\max}=S\left(\frac{4}{3}\right)=\frac{64}{3}-\frac{128}{27}-\frac{32}{9}=\frac{352}{27}$（万平方米），即图书馆占地面积的最大值为$\frac{352}{27}$万平方米.

4. 20

思路导引 设C点距D点x km，得到$|BD|=40$，$|AC|=50-x$，且$|BC|=\sqrt{40^2+x^2}$，再设总的水管费用为y元，得$y=3a(50-x)+5a\sqrt{x^2+40^2}(0<x<50)$，利用导数求得函数的单调性与最小值，即可求解.

【解析】由题意知，点 C 在线段 AD 上，

设 C 点距 D 点 x km，$0<x<50$，

则 $|BD|=40$，$|AC|=50-x$，

所以 $|BC|=\sqrt{BD^2+CD^2}=\sqrt{40^2+x^2}$，

再设总的水管费用为 y 元，则 $y=3a(50-x)+5a\sqrt{x^2+40^2}$ $(0<x<50)$，

可得 $y'=-3a+\dfrac{5ax}{\sqrt{x^2+40^2}}$，令 $y'=0$，解得 $x=30$（负值舍去），

当 $x\in(0,30)$ 时，$y'<0$，y 在 $(0,30)$ 上单调递减；

当 $x\in(30,50)$ 时，$y'>0$，y 在 $(30,50)$ 上单调递增，

所以当 $x=30$ 时，函数取得极小值，也是最小值，

此时 $|AC|=20$ km，

故供水站 C 建立在岸边距离 A 处 20 km 处才能使水管费用最省.

5.【解】(1)分公司一年的利润 $L(x)$（万元）与每件产品的售价 x 的函数关系式为 $L(x)=(x-3-a)(12-x)^2$，$x\in[9,11]$.

(2) $L'(x)=(12-x)^2-2(x-3-a)(12-x)=(12-x)(18+2a-3x)$.

令 $L'(x)=0$ 得 $x=6+\dfrac{2}{3}a$ 或 $x=12$（舍去）.

因为 $3\leqslant a\leqslant 5$，所以 $8\leqslant 6+\dfrac{2}{3}a\leqslant\dfrac{28}{3}$.

又在 $x=6+\dfrac{2}{3}a$ 附近的左、右两侧 $L'(x)$ 的值由正变负.

所以当 $8\leqslant 6+\dfrac{2}{3}a<9$，即 $3\leqslant a<\dfrac{9}{2}$ 时，

$L(x)_{\max}=L(9)=(9-3-a)(12-9)^2=9(6-a)=54-9a$.

当 $9\leqslant 6+\dfrac{2}{3}a\leqslant\dfrac{28}{3}$，即 $\dfrac{9}{2}\leqslant a\leqslant 5$ 时，

$L(x)_{\max}=L\left(6+\dfrac{2}{3}a\right)=\left(6+\dfrac{2}{3}a-3-a\right)\left[12-\left(6+\dfrac{2}{3}a\right)\right]^2=4\left(3-\dfrac{1}{3}a\right)^3$，

所以 $Q(a)=\begin{cases}54-9a, 3\leqslant a<\dfrac{9}{2},\\4\left(3-\dfrac{1}{3}a\right)^{3}, \dfrac{9}{2}\leqslant a\leqslant 5.\end{cases}$

综上，若 $3\leqslant a<\dfrac{9}{2}$，则当每件售价为 9 元时，分公司一年的利润 $L(x)$ 最大，最大值 $Q(a)=54-9a$（万元）；

若 $\dfrac{9}{2}\leqslant a\leqslant 5$，则当每件售价为 $\left(6+\dfrac{2}{3}a\right)$ 元时，分公司一年的利润 $L(x)$ 最大，最大值 $Q(a)=4\left(3-\dfrac{1}{3}a\right)^{3}$（万元）.

§ 6 ~ § 7 节测上分

1. D 【解析】$f'(x)=2e^{2x}-f'(0)e^{x}$，

则 $f'(0)=2e^{0}-f'(0)e^{0}=2-f'(0)$，解得 $f'(0)=1$，

所以 $f'(x)=2e^{2x}-e^{x}=e^{x}(2e^{x}-1)$.

因为 $e^{x}>0$，所以令 $f'(x)>0$，得 $2e^{x}-1>0$，解得 $x>\ln\dfrac{1}{2}=-\ln 2$，

所以 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(-\ln 2,+\infty)$.

2. C 【解析】设正三棱柱的底面边长为 x，侧棱长为 y，则 $6x+3y=3$，即 $y=1-2x, 0<x<\dfrac{1}{2}$.

正三棱柱的体积 $V=\dfrac{\sqrt{3}}{4}x^{2}y=\dfrac{\sqrt{3}}{4}x^{2}(1-2x)=\dfrac{\sqrt{3}}{4}(x^{2}-2x^{3})\left(0<x<\dfrac{1}{2}\right)$，$V'=\dfrac{\sqrt{3}}{4}(2x-6x^{2})=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot x(1-3x)$.

当 $x\in\left(0,\dfrac{1}{3}\right)$ 时，$V'>0$，当 $x\in\left(\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{2}\right)$ 时，$V'<0$，所以函数 $V=\dfrac{\sqrt{3}}{4}(x^{2}-2x^{3})$ 在 $\left(0,\dfrac{1}{3}\right)$ 上单调递增，在 $\left(\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{2}\right)$ 上单调递减，

所以当 $x=\dfrac{1}{3}$ 时，V 取得最大值，最大值为 $\dfrac{\sqrt{3}}{4}\times\left[\left(\dfrac{1}{3}\right)^{2}-2\times\left(\dfrac{1}{3}\right)^{3}\right]=\dfrac{\sqrt{3}}{108}$.

3. C 【解析】因为 $f'(x)=-2x+8+\frac{a}{x}$ $(x>0)$，函数 $f(x)=-x^2+8x+a\ln x$ 在区间 $(4,+\infty)$ 上单调递减，

所以当 $x\in(4,+\infty)$ 时，$-2x+8+\frac{a}{x}\leqslant 0$

且不恒为 0，所以当 $x\in(4,+\infty)$ 时，

$a\leqslant 2x^2-8x$ 恒成立.

设 $g(x)=2x^2-8x, x\in(4,+\infty)$，

因为 $g(x)$ 的图象的对称轴为直线 $x=2$，所以 $g(x)=2x^2-8x$ 在 $(4,+\infty)$ 上单调递增，所以 $g(x)>g(4)=0$，所以 $a\leqslant 0$. **故选 C.**

4. ABD 【解析】根据题图可知，当 $x\in(-\infty,3)$ 时，$f'(x)\geqslant 0$ 且不恒为零，

当 $x\in(3,+\infty)$ 时，$f'(x)<0$，因此可得 $f(x)$ 在 $(-\infty,3)$ 上单调递增，在 $(3,+\infty)$ 上单调递减，

即 $f(x)$ 在 $x=3$ 处取得极大值且 $f(x)$ 有唯一极值点 3，**即 A 错误，B 错误，C 正确；**

因为 $f(x)$ 在 $(-\infty,3)$ 上单调递增，又 $(-\infty,1)\subseteq(-\infty,3)$，可得 $f(x)$ 在 $(-\infty,1)$ 上单调递增，**即 D 错误. 故选 ABD.**

5. BD 【解析】因为 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{a^x}{\ln a}$，$x>0$，所以 $f'(x)=x^2-a^x$，

令 $f'(x)=0$，可得 $\ln a=\frac{2\ln x}{x}$，

则原题意等价于直线 $y=\ln a$ 与 $y=\frac{2\ln x}{x}$ 的图象在 $(0,+\infty)$ 内有 2 个不同的交点.

设 $g(x)=\frac{2\ln x}{x}, x>0$，

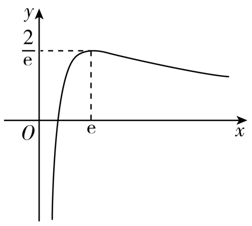
则 $g'(x)=\frac{2(1-\ln x)}{x^2}$.

当 $x\in(0,\mathrm{e})$ 时，$g'(x)>0$，当 $x\in(\mathrm{e},+\infty)$ 时，$g'(x)<0$，

则 $g(x)$ 在 $(0,\mathrm{e})$ 上单调递增，在 $(\mathrm{e},+\infty)$ 上单调递减，

则 $g(x)\leqslant g(\mathrm{e})=\frac{2}{\mathrm{e}}$，

且当 x 趋近于$+\infty$ 时,$g(x)$ 趋近于 0,当 x 趋近于 0 时,$g(x)$ 趋近于$-\infty$,作出 $g(x)$ 的大致图象如图所示.



可得 $\ln a\in\left(0,\dfrac{2}{e}\right)$,解得 $1<a<e^{\frac{2}{e}}$,**故选 BD.**

6. ACD 【解析】对于 A,函数 $f(x)=\dfrac{x}{\ln x}$ 的定义域满足 $\begin{cases}x>0,\\ \ln x\neq 0,\end{cases}$ 解得 $x\in(0,1)\cup(1,+\infty)$,

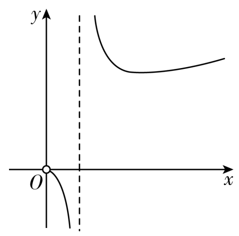
由 $f'(x)=\dfrac{\ln x-1}{(\ln x)^2}$,当 $0<x<1$ 或 $1<x<e$ 时,$f'(x)<0$,所以 $f(x)$ 在$(0,1)$和$(1,e)$上单调递减,当 $x>e$ 时,$f'(x)>0$,所以 $f(x)$ 在$(e,+\infty)$上单调递增,所以 e 是 $f(x)$ 的极小值点,**A 正确**;

对于 B,由 A 分析可知 $f(x)$ 的单调递减区间是$(0,1)$,$(1,e)$,**故 B 不正确**;

对于 D,由 A 可得当 $x\in(0,1)$和$(1,e)$时,$f(x)$ 单调递减,

当 $x\in(e,+\infty)$时,$f(x)$ 单调递增,且 $f(e)=\dfrac{e}{\ln e}=e$,

当 $x\to 0$ 时,$f(x)\to 0$,当 x 从 1 的左侧$\to 1$ 时,$f(x)\to-\infty$,当 x 从 1 的右侧$\to 1$ 时,$f(x)\to+\infty$,当 $x\to+\infty$ 时,$f(x)\to+\infty$,作出 $f(x)$ 的大致图象如图所示,由图可得 $f(x)$ 的值域是$(-\infty,0)\cup[e,+\infty)$,**故 D 正确**;



对于 C,由 $f(x)$ 的图象可得,若直线 $y=m$ 与 $y=f(x)$ 的图象有两个不同的

公共点，则 $m>e$，**故 C 正确.**

故选 ACD.

7.【解】(1)依题意，当 $x=0$ 时，$M(0)=\frac{20}{3}$，即$\frac{k}{3}=\frac{20}{3}$，解得 $k=20$，

所以 $f(x)=8x+20\cdot\frac{20}{2x+3}=8x+\frac{400}{2x+3}$ $(0\leqslant x\leqslant 10)$.

(2)$f(x)=8x+\frac{400}{2x+3}(0\leqslant x\leqslant 10)$，

$f'(x)=8-\frac{800}{(2x+3)^2}$，

令 $f'(x)=0$，得 $x=\frac{7}{2}$(负值舍去).

当 $0\leqslant x<\frac{7}{2}$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减；

当 $\frac{7}{2}<x\leqslant 10$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增，所以 $f(x)_{\min}=f\left(\frac{7}{2}\right)=68$.

所以隔热层修建 $\frac{7}{2}$ cm 时，总费用 $f(x)$ 达到最小，最小值为 68 万元.

一题多解 (2)$f(x)=8x+\frac{400}{2x+3}=4(2x+3)+\frac{400}{2x+3}-12\geqslant 2\sqrt{4(2x+3)\cdot\frac{400}{2x+3}}-12=80-12=68$，

当且仅当 $4(2x+3)=\frac{400}{2x+3}$，即 $x=\frac{7}{2}$ 时，等号成立，所以隔热层修建 $\frac{7}{2}$ cm 时，总费用 $f(x)$ 达到最小，最小值为 68 万元.

8.【解】(1)因为 $f(x)=2x^3-ax^2+b$，所以 $f'(x)=6x^2-2ax$，

因为函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处取得极小值 -4，所以$\begin{cases}f'(1)=6-2a=0,\\f(1)=2-a+b=-4,\end{cases}$

解得$\begin{cases}a=3,\\b=-3,\end{cases}$ 此时 $f(x)=2x^3-3x^2-3$，

$f'(x)=6x^2-6x=6x(x-1)$，令 $f'(x)=0$，得 $x=0$ 或 $x=1$，

当 $x<0$ 或 $x>1$ 时，$f'(x)>0$；当 $0<x<1$ 时，$f'(x)<0$，则 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$，$(1,+\infty)$ 上单调递增，在 $(0,1)$ 上单调递减，所以当 $x=1$ 时，$f(x)$ 取得极小值，为 -4，符合题意. 所以 $a=3,b=-3$.

(2) $f'(x)=6x^2-2ax=2x(3x-a)$，令 $f'(x)=0$，得 $x=0$ 或 $x=\frac{a}{3}$，

已知 $a>0$，所以当 $x<0$ 或 $x>\frac{a}{3}$ 时，

$f'(x)>0$，当 $0<x<\frac{a}{3}$ 时，$f'(x)<0$，

所以 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(-\infty,0)$，$\left(\frac{a}{3},+\infty\right)$；单调递减区间为 $\left(0,\frac{a}{3}\right)$.

当 $x=0$ 时，函数 $f(x)$ 取得极大值，即 $f(0)=b=1>0$，所以 $f(x)=2x^3-ax^2+1$.

当 $x=\frac{a}{3}$ 时，函数 $f(x)$ 取得极小值，

$f\left(\frac{a}{3}\right)=2\left(\frac{a}{3}\right)^3-a\left(\frac{a}{3}\right)^2+1=\frac{2a^3}{27}-\frac{a^3}{9}+1=-\frac{a^3}{27}+1$，

又当 $x\to-\infty$ 时，$f(x)\to-\infty$，当 $x\to+\infty$ 时，$f(x)\to+\infty$，

所以当 $-\frac{a^3}{27}+1>0$，即 $0<a<3$ 时，$f(x)$ 有 1 个零点；

当 $-\frac{a^3}{27}+1=0$，即 $a=3$ 时，$f(x)$ 有 2 个零点；

当 $-\frac{a^3}{27}+1<0$，即 $a>3$ 时，$f(x)$ 有 3 个零点.

9.【解】(1) 函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，

$f'(x)=\frac{1}{x}+a+\frac{a}{x^2}=\frac{ax^2+x+a}{x^2}(a<0)$，

令 $g(x)=ax^2+x+a(x>0)$，则 $ax^2+x+a=0$ 的判别式 $\Delta=1-4a^2$.

①当 $a\leqslant-\frac{1}{2}$ 时，$g(x)\leqslant0$，$f'(x)=$

$\frac{ax^2+x+a}{x^2}\leqslant 0$，所以函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减.

②当 $-\frac{1}{2}<a<0$ 时，$\Delta>0$，解 $ax^2+x+a=0$，得 $x_1=\frac{-1+\sqrt{1-4a^2}}{2a}$，$x_2=\frac{-1-\sqrt{1-4a^2}}{2a}$. 当 $x\in(0,x_1)\cup(x_2,+\infty)$ 时，$f'(x)<0$，当 $x\in(x_1,x_2)$ 时，$f'(x)>0$，所以函数 $f(x)$ 在 $\left(0,\frac{-1+\sqrt{1-4a^2}}{2a}\right)$，$\left(\frac{-1-\sqrt{1-4a^2}}{2a},+\infty\right)$ 上单调递减，在 $\left(\frac{-1+\sqrt{1-4a^2}}{2a},\frac{-1-\sqrt{1-4a^2}}{2a}\right)$ 上单调递增.

综上，当 $a\leqslant-\frac{1}{2}$ 时，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减；

当 $-\frac{1}{2}<a<0$ 时，$f(x)$ 在 $\left(0,\frac{-1+\sqrt{1-4a^2}}{2a}\right)$，$\left(\frac{-1-\sqrt{1-4a^2}}{2a},+\infty\right)$ 上单调递减，在 $\left(\frac{-1+\sqrt{1-4a^2}}{2a},\frac{-1-\sqrt{1-4a^2}}{2a}\right)$ 上单调递增.

(2)由(1)可知当 $-\frac{1}{2}<a<0$ 时，函数 $f(x)$ 存在两个极值点 x_1,x_2，且满足 $x_1+x_2=-\frac{1}{a}$，$x_1x_2=1$，

所以 $f(x_1)-f(x_2)=\ln x_1-\ln x_2+a(x_1-x_2)-a\left(\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x_2}\right)=\ln x_1-\ln x_2-\frac{2(x_1-x_2)}{x_1+x_2}=\ln\frac{x_1}{x_2}-2\cdot\frac{\frac{x_1}{x_2}-1}{\frac{x_1}{x_2}+1}$.

令 $\frac{x_1}{x_2}=t$，$t\in\left(0,\frac{1}{2}\right]$，$h(t)=\ln t-\frac{2(t-1)}{t+1}\left(0<t\leqslant\frac{1}{2}\right)$，

则 $h'(t)=\frac{1}{t}-\frac{4}{(t+1)^2}=\frac{(t-1)^2}{t(t+1)^2}>0$，所

以 $h(t)$ 在 $\left(0,\frac{1}{2}\right]$ 上单调递增，

因为 $h\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{2}{3}-\ln 2$，所以 $f(x_1)-f(x_2)$ 的最大值为 $\frac{2}{3}-\ln 2$.

专题上分 5　切线问题

1. C　【解析】由题可知 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$，$f'(x)=\dfrac{(e^x-3\sin x)(1-x)+(e^x+3\cos x)}{(1-x)^2}$，

则 $f'(0)=\frac{1+4}{1}=5$，又 $f(0)=4$，所以曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,f(0))$ 处的切线方程为 $y-4=5x$. 直线 $y=5x+4$ 与 x 轴相交于点 $\left(-\frac{4}{5},0\right)$，与 y 轴相交于点 $(0,4)$，所以所求三角形的面积为 $\frac{1}{2}\times\frac{4}{5}\times 4=\frac{8}{5}$，**故选 C.**

2. B　【解析】$f'(x)=3x^2-a$，$f'(x_0)=3x_0^2-a$，$f'\left(\frac{1}{x_0}\right)=\frac{3}{x_0^2}-a$，根据题意可知 $(3x_0^2-a)\left(\frac{3}{x_0^2}-a\right)=-1$，

提示：由两切线垂直，斜率之积为 -1 构建等式

则有 $a^2-3a\left(x_0^2+\frac{1}{x_0^2}\right)+10=0$.

当 $a=0$ 时，显然 $(3x_0^2-a)\left(\frac{3}{x_0^2}-a\right)=-1$ 不成立，所以 $a\neq 0$，$\frac{10+a^2}{3a}=x_0^2+\frac{1}{x_0^2}$.

$x_0^2+\frac{1}{x_0^2}\geqslant 2$，当且仅当 $x_0^2=1$ 时，等号成立.

若 $a<0$，则 $\frac{10+a^2}{3a}<0$，不满足题意.

若 $a>0$，则 $\frac{10+a^2}{3a}=\frac{10}{3a}+\frac{a}{3}\geqslant\frac{2\sqrt{10}}{3}$，当且仅当 $\frac{10}{3a}=\frac{a}{3}$，即 $a=\sqrt{10}$ 时，等号成立，又 $\frac{2\sqrt{10}}{3}>2$，故 $a>0$ 符合题意. 综上，a 的取值范围为 $(0,+\infty)$.

故选 B.

3. 1 【解析】函数 $f(x)=\ln(x+a)$ 的定义域为 $(-a,+\infty)$，由题知 $1>-a$，故 $a>-1$.

函数 $f(x)=\ln(x+a)$ 的导函数 $f'(x)=\frac{1}{x+a}$，所以 $f'(1)=\frac{1}{1+a}$，因为函数 $f(x)=\ln(x+a)$ 的图象在 $x=1$ 处的切线与直线 $y=\frac{x}{2}+1$ 平行，所以 $\frac{1}{1+a}=\frac{1}{2}$，所以 $a=1$，经验证，此时满足题意.

4. $e^2x-4y=0$

攻略上分 本题为“过”某点的切线问题，可利用通法攻略21中的方法求得切线方程.

【解析】设切点坐标为 $\left(t,\frac{e^t}{t}\right)(t\neq0)$，

$\because f(x)=\frac{e^x}{x}(x\neq0)$，$\therefore f'(x)=\frac{e^x(x-1)}{x^2}$，则切线斜率 $k=f'(t)=\frac{e^t(t-1)}{t^2}$，

由于切线过原点，则有 $k=\frac{e^t}{t^2}$，由斜率相等可得 $\frac{e^t}{t^2}=\frac{e^t(t-1)}{t^2}$，解得 $t=2$，

$\therefore$ 过原点且与曲线 $y=f(x)$ 相切的直线方程为 $y=\frac{e^2\times(2-1)}{4}\times(x-2)+\frac{e^2}{2}$，

整理得 $e^2x-4y=0$.

5. 【解】(1) 因为 $f(x)=-x^3+x+1$，所以 $f'(x)=-3x^2+1$，

设切点坐标为 $(x_1,-x_1^3+x_1+1)$，则 $f'(x_1)=-3x_1^2+1$，所以切线方程为 $y-(-x_1^3+x_1+1)=(-3x_1^2+1)(x-x_1)$，

又切线过点 $(1,1)$，所以 $1-(-x_1^3+x_1+1)=(-3x_1^2+1)(1-x_1)$，解得 $x_1=1$ 或 $x_1=-\frac{1}{2}$，

所以所求切线方程为 $2x+y-3=0$ 或 $x-4y+3=0$.

(2) 因为 $g(x)=2x^3-3x$，所以 $g'(x)=$

$6x^2-3$,

设过点 $P(1,t)$ 的直线与曲线 $y=g(x)$ 相切于点 (x_0,y_0),则 $y_0=2x_0^3-3x_0$,且切线斜率 $k=g'(x_0)=6x_0^2-3$,

所以切线方程为 $y-(2x_0^3-3x_0)=(6x_0^2-3)(x-x_0)$,

因此 $t-(2x_0^3-3x_0)=(6x_0^2-3)(1-x_0)$,

整理得 $4x_0^3-6x_0^2+t+3=0$.

设 $h(x)=4x^3-6x^2+t+3$,则过点 $P(1,t)$ 存在 3 条直线与曲线 $y=g(x)$ 相切等价于 $h(x)$ 有 3 个不同的零点.

因为 $h'(x)=12x^2-12x=12x(x-1)$,所以 $x,h'(x)$ 与 $h(x)$ 的变化情况如表所示.

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
$h'(x)$	+	0	−	0	+
$h(x)$	单调递增	极大值	单调递减	极小值	单调递增

所以 $h(0)=t+3$ 是 $h(x)$ 的极大值,$h(1)=t+1$ 是 $h(x)$ 的极小值.

当 $h(0)=t+3\leqslant 0$,即 $t\leqslant -3$ 时,$h(x)$ 至多有 2 个零点,不符合题意.

当 $h(1)=t+1\geqslant 0$,即 $t\geqslant -1$ 时,$h(x)$ 至多有 2 个零点,不符合题意.

当 $h(0)>0$ 且 $h(1)<0$,即 $-3<t<-1$ 时,因为 $h(-1)=t-7<0$,$h(2)=t+11>0$,所以 $h(x)$ 在区间 $[-1,0)$,$[0,1)$,$[1,2)$ 上各有 1 个零点,

又 $h(x)$ 在区间 $(-\infty,0)$ 和 $(1,+\infty)$ 上单调递增,所以当 $-3<t<-1$ 时,$h(x)$ 有 3 个零点.

综上所述,当过点 $P(1,t)$ 存在 3 条直线与曲线 $y=g(x)$ 相切时,t 的取值范围是 $(-3,-1)$.

6. C 【解析】易知 $f'(x)=e^x$,$g'(x)=\dfrac{1}{x}(x>0)$,设直线 l 与 $f(x)=e^x$ 的图象相切于点 (x_1,e^{x_1}),则 $l:y-e^{x_1}=e^{x_1}(x-x_1)$,设直线 l 与 $g(x)=\ln x+2$ 的图象相切于点 $(x_2,2+\ln x_2)$,

则 $l:y-(2+\ln x_2)=\frac{1}{x_2}(x-x_2)$,

由 $\begin{cases} e^{x_1}=\frac{1}{x_2}, \\ e^{x_1}-x_1e^{x_1}=2+\ln x_2-x_2\cdot\frac{1}{x_2}, \end{cases}$

消去 x_1 得 $(x_2-1)\cdot(1+\ln x_2)=0$,故 $\begin{cases} x_1=0, \\ x_2=1 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x_1=1, \\ x_2=\frac{1}{e}, \end{cases}$ 所以直线 l 的方程为 $y=x+1$ 或 $y=ex$. **故选** C.

7. A

攻略上分 存在两条直线与两个函数的图象都相切,是典型的公切线问题,利用通法攻略22中的分离参数法,根据存在两条公切线,将问题转化为函数图象的交点问题,进而求出参数的取值范围.

【**解析**】易知 $f'(x)=2x(x>0)$,$g'(x)=ae^x$. 设直线 l 为 $f(x)$,$g(x)$ 图象的公切线,直线 l 与函数 $f(x)=x^2(x>0)$ 的图象相切于点 $A(s,s^2)(s>0)$,则 $l:y-s^2=2s(x-s)$.

设直线 l 与函数 $g(x)=ae^x$ 的图象相切于点 (t,ae^t),则 $l:y-ae^t=ae^t(x-t)$.

则 $\begin{cases} 2s=ae^t, \\ s^2-2s^2=ae^t-ate^t, \end{cases}$ 可得 $s=2t-2(t>1)$,代入 $2s=ae^t$,得 $a=\frac{4t-4}{e^t}$.

设 $h(t)=\frac{4t-4}{e^t}(t>1)$,问题转化为 $h(t)$ 在 $(1,+\infty)$ 上的图象与直线 $y=a$ 有两个交点,

易知 $h'(t)=\frac{8-4t}{e^t}(t>1)$,

当 $t\in(1,2)$ 时,$h'(t)>0$,$h(t)$ 单调递增,

当 $t\in(2,+\infty)$ 时,$h'(t)<0$,$h(t)$ 单调递减,

又 $h(1)=0$,$h(2)=\frac{4}{e^2}$,当 $t\to+\infty$ 时,$h(t)>0$,且 $h(t)\to0$,所以实数 a 的取值范围是 $\left(0,\frac{4}{e^2}\right)$. **故选** A.

8. B 【解析】令 $f(x)=\ln x+1, x\in(0,+\infty)$，则 $f'(x)=\frac{1}{x}$.

设直线 $y=kx+1$ 与曲线 $y=\ln x+1$ 的切点坐标为 $(x_1,\ln x_1+1)$，

则切线方程为 $y-\ln x_1-1=\frac{1}{x_1}(x-x_1)$，

即 $y=\frac{1}{x_1}x+\ln x_1$，

因为曲线 $y=\ln x+1$ 的切线方程为 $y=kx+1$，所以 $\begin{cases}\frac{1}{x_1}=k,\\ \ln x_1=1,\end{cases}$

解得 $x_1=\mathrm{e}, k=\frac{1}{\mathrm{e}}$，

所以切线方程为 $y=\frac{1}{\mathrm{e}}x+1$.

令 $g(x)=a\mathrm{e}^x+1$，则 $g'(x)=a\mathrm{e}^x$，

设直线 $y=\frac{1}{\mathrm{e}}x+1$ 与曲线 $y=a\mathrm{e}^x+1$ 的切点坐标为 $(x_0,a\mathrm{e}^{x_0}+1)$，

所以 $g'(x_0)=a\mathrm{e}^{x_0}=\frac{1}{\mathrm{e}}$，①

又因为切点 $(x_0,a\mathrm{e}^{x_0}+1)$ 在直线 $y=\frac{1}{\mathrm{e}}x+1$ 上，所以 $a\mathrm{e}^{x_0}+1=\frac{1}{\mathrm{e}}x_0+1$，即 $a\mathrm{e}^{x_0}=\frac{1}{\mathrm{e}}x_0$，②

由①②可得 $x_0=1$，所以 $a\mathrm{e}=\frac{1}{\mathrm{e}}$，解得 $a=\frac{1}{\mathrm{e}^2}$.

一题多解 设直线 $y=kx+1$ 与曲线 $y=\ln x+1$ 和 $y=a\mathrm{e}^x+1$ 的切点分别为 $P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$，

易知 $\begin{cases}y_1=kx_1+1,\\ y_1=\ln x_1+1,\\ \frac{1}{x_1}=k,\end{cases}$ 则 $\ln x_1=kx_1=1$，

所以 $x_1=\mathrm{e}, k=\frac{1}{\mathrm{e}}$.

同理 $\begin{cases}y_2=kx_2+1,\\ y_2=a\mathrm{e}^{x_2}+1,\\ a\mathrm{e}^{x_2}=k,\end{cases}$ 则 $a\mathrm{e}^{x_2}=kx_2=k$，

所以 $x_2=1$，所以 $k=a\mathrm{e}=\frac{1}{\mathrm{e}}$，所以 $a=\frac{1}{\mathrm{e}^2}$. **故选** B.

9. D 【解析】设直线 l 与曲线 $y=e^{x+m}$ 相切于点 (x_1,e^{x_1+m})，则直线 $l:y-e^{x_1+m}=e^{x_1+m}(x-x_1)$.

设直线 l 与曲线 $y=\ln(x+n)+1$ 相切于点 $(x_2,\ln(x_2+n)+1)$，则直线 $l:y-\ln(x_2+n)-1=\dfrac{1}{x_2+n}(x-x_2)$.

因为直线 l 是曲线 $y=e^{x+m}$ 与 $y=\ln(x+n)+1$ 公共的切线，

所以 $\begin{cases} e^{x_1+m}=\dfrac{1}{x_2+n}, \\ (1-x_1)e^{x_1+m}=\ln(x_2+n)+1-\dfrac{x_2}{x_2+n}, \end{cases}$

则 $m-n+1=(x_2+n)\ln(x_2+n)-\ln(x_2+n)$. 令 $t=x_2+n(t>0)$，$f(t)=t\ln t-\ln t=(t-1)\ln t(t>0)$，则 $f'(t)=\ln t-\dfrac{1}{t}+1$，$f'(t)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，且 $f'(1)=0$，所以当 $t\in(0,1)$ 时，$f'(t)<0$，$f(t)$ 单调递减，当 $t\in(1,+\infty)$ 时，$f'(t)>0$，$f(t)$ 单调递增，所以 $f(t)_{\min}=f(1)=0$，于是有 $m-n+1\geqslant 0$，即 $n-m\leqslant 1$. **故选 D.**

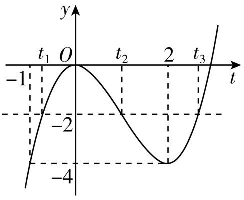
10. ABD 【解析】对于 A，由函数 $f(x)=x^3-mx^2$，可得 $f'(x)=3x^2-2mx$，因为 $x=2$ 是函数 $f(x)$ 的一个极值点，所以 $f'(2)=3\times2^2-2m\times2=0$，解得 $m=3$，经检验，符合题意，**所以 A 正确；**

对于 B，由 $f'(x)=3x(x-2)$，令 $f'(x)=0$，解得 $x=0$ 或 $x=2$，当 $x\in(-\infty,0)$ 时，$f'(x)>0$，当 $x\in(0,2)$ 时，$f'(x)<0$，当 $x\in(2,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，故 $f(x)$ 在区间 $(-\infty,0)$ 上单调递增，在区间 $(0,2)$ 上单调递减，在区间 $(2,+\infty)$ 上单调递增，**所以 B 正确；**

对于 C，设过点 $(1,-2)$ 的切线与曲线 $y=f(x)$ 相切于点 (x_0,y_0)，则切线方程为 $y=f'(x_0)(x-1)-2=(3x_0^2-6x_0)(x-1)-2$，则 $f(x_0)=(3x_0^2-6x_0)(x_0-1)-2=x_0^3-3x_0^2$，整理得 $2(x_0-1)(x_0^2-2x_0+1)=0$，解得 $x_0=1$，所以只能作一条切线，**所以 C 错误；**

对于 D，令 $f(x)=t$，则方程 $f(t)=-2$ 的实根有 3 个，如图所示，不妨设为

$t_1,t_2,t_3(-1<t_1<0<t_2<t_3)$，所以方程 $f(x)=t_1$ 有 3 个不同实根，方程 $f(x)=t_2$ 和 $f(x)=t_3$ 均有 1 个实根，故函数 $y=f(f(x))+2$ 有 5 个零点，**所以 D 正确. 故选 ABD.**



11. 2

攻略上分 求两条曲线的公切线条数问题，可以结合通法攻略 22 及通法攻略 23 来判断.

【解析】设公切线与曲线 $y=f(x)$，曲线 $y=g(x)$ 分别相切于点 $\left(x_1,-\frac{1}{x_1}\right)(x_1\neq 0)$，$(x_2,x_2\ln x_2)(x_2>0)$，由 $f'(x)=\frac{1}{x^2}$，得 $f'(x_1)=\frac{1}{x_1^2}$，则切线方程为 $y+\frac{1}{x_1}=\frac{1}{x_1^2}(x-x_1)$，即 $y=\frac{1}{x_1^2}x-\frac{2}{x_1}$.

由 $g'(x)=\ln x+1$，得 $g'(x_2)=\ln x_2+1$，因此切线方程为 $y-x_2\ln x_2=(\ln x_2+1)(x-x_2)$，即 $y=(\ln x_2+1)x-x_2$.

易知 $\begin{cases}\frac{1}{x_1^2}=\ln x_2+1,\\ \frac{2}{x_1}=x_2,\end{cases}$ 因此可得 $x_2^2-4\ln x_2-4=0(x_2>0)$.

设 $h(x)=x^2-4\ln x-4(x>0)$，

则 $h'(x)=2x-\frac{4}{x}=\frac{2x^2-4}{x}$，

令 $h'(x)>0$，解得 $x>\sqrt{2}$，即 $h(x)$ 在 $(\sqrt{2},+\infty)$ 上单调递增，

令 $h'(x)<0$，解得 $0<x<\sqrt{2}$，即 $h(x)$ 在 $(0,\sqrt{2})$ 上单调递减，

当 $x\to 0$ 时，$h(x)\to+\infty$，又 $h(\sqrt{2})=2-4\ln\sqrt{2}-4=-2-2\ln 2<0$，$h(4)>0$，

故函数 $h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上有 2 个零点，即曲线 $y=f(x)$ 与 $y=g(x)$ 的公切线有 2 条.

专题上分 6 含参函数单调性的分类讨论

1.【解】(1) 由 $f(x)=\ln(x+1)-ax-a^2$，$x\in(-1,+\infty)$，可得 $f'(x)=\dfrac{1}{x+1}-a$.

点拨：因为 a 的取值会影响导数的符号，进而改变原函数的单调性，所以下面对 a 进行分类讨论

当 $a\leqslant 0$ 时，$f'(x)=\dfrac{1}{x+1}-a>0$ 恒成立，所以 $f(x)$ 在 $(-1,+\infty)$ 上单调递增.

当 $a>0$ 时，令 $f'(x)>0$，即 $\dfrac{1}{x+1}-a>0$，解得 $x<-1+\dfrac{1}{a}$，因为 $f(x)$ 的定义域为 $(-1,+\infty)$，所以 $-1<x<-1+\dfrac{1}{a}$，由 $f'(x)<0$，可得 $x>-1+\dfrac{1}{a}$，所以 $f(x)$ 在 $\left(-1,-1+\dfrac{1}{a}\right)$ 上单调递增，在 $\left(-1+\dfrac{1}{a},+\infty\right)$ 上单调递减.

综上，当 $a\leqslant 0$ 时，$f(x)$ 在 $(-1,+\infty)$ 上单调递增；

当 $a>0$ 时，$f(x)$ 在 $\left(-1,-1+\dfrac{1}{a}\right)$ 上单调递增，在 $\left(-1+\dfrac{1}{a},+\infty\right)$ 上单调递减.

(2) 由 (1) 可知，当 $a\leqslant 0$ 时，函数无极值点，当 $a>0$ 时，函数在 $x=-1+\dfrac{1}{a}$ 处有极大值，

可得 $f\left(-1+\dfrac{1}{a}\right)\leqslant -3-\ln 2$，即 $\ln\dfrac{1}{a}+a-1-a^2\leqslant -3-\ln 2$，化简得 $a^2-a+\ln a-2-\ln 2\geqslant 0$.

令 $g(a)=a^2-a+\ln a-2-\ln 2\ (a>0)$，则 $g'(a)=2a-1+\dfrac{1}{a}=\dfrac{2a^2-a+1}{a}$，

因为 $2a^2-a+1=2\left(a-\dfrac{1}{4}\right)^2+\dfrac{7}{8}>0$，所以 $g'(a)>0$，$g(a)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

因为 $g(2)=2^2-2+\ln 2-2-\ln 2=0$，

所以由 $a^2-a+\ln a-2-\ln 2\geqslant 0$，

解得 $a\geqslant 2$,

所以实数 a 的取值范围是 $[2,+\infty)$.

2.【解】(1)①由题意得 $f'(x)=2x-(6+a)+\frac{3a}{x}=\frac{2x^2-(6+a)x+3a}{x}=\frac{(x-3)(2x-a)}{x}(x>0)$, 则 $f'(2)=\frac{-(4-a)}{2}=-1$, 解得 $a=2$.

②由①得 $f(x)=x^2-8x+6\ln x(x>0)$,

$f'(x)=\frac{2(x-3)(x-1)}{x}$,

当 $x\in(0,1)$ 时, $f'(x)>0$,

当 $x\in(1,2)$ 时, $f'(x)<0$,

故 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增,

在 $(1,2)$ 上单调递减,

所以 $f(x)$ 在 $x=1$ 处取得极大值,也就是 $f(x)$ 在 $(0,2)$ 上的最大值,最大值为 $f(1)=1-8+6\ln 1=-7$.

(2)由题意有 $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$,

易错: 定义域是讨论函数单调性的前提

$f'(x)=\frac{(x-3)(2x-a)}{x}$.

点拨: a 的不同取值会影响导函数在相应区间上的符号

当 $a\leqslant 0$ 时, $2x-a>0$, 由 $f'(x)<0$, 得 $0<x<3$, 由 $f'(x)>0$, 得 $x>3$, 所以 $f(x)$ 在 $(0,3)$ 上单调递减, 在 $(3,+\infty)$ 上单调递增;

当 $0<a<6$ 时, 由 $f'(x)<0$, 得 $\frac{a}{2}<x<3$, 由 $f'(x)>0$, 得 $0<x<\frac{a}{2}$ 或 $x>3$, 所以 $f(x)$ 在 $\left(0,\frac{a}{2}\right)$ 上单调递增, 在 $\left(\frac{a}{2},3\right)$ 上单调递减, 在 $(3,+\infty)$ 上单调递增;

当 $a=6$ 时, $f'(x)\geqslant 0$ 且不恒为 0, 则 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增;

当 $a>6$ 时, 由 $f'(x)<0$, 得 $3<x<\frac{a}{2}$, 由 $f'(x)>0$, 得 $0<x<3$ 或 $x>\frac{a}{2}$,

所以 $f(x)$ 在 $(0,3)$ 上单调递增, 在

$\left(3,\frac{a}{2}\right)$上单调递减，在$\left(\frac{a}{2},+\infty\right)$上单调递增.

综上所述，当$a\leqslant 0$时，$f(x)$在$(0,3)$上单调递减，在$(3,+\infty)$上单调递增；

当$0<a<6$时，$f(x)$在$\left(0,\frac{a}{2}\right)$，$(3,+\infty)$上单调递增，在$\left(\frac{a}{2},3\right)$上单调递减；

当$a=6$时，$f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增；

当$a>6$时，$f(x)$在$(0,3)$，$\left(\frac{a}{2},+\infty\right)$上单调递增，在$\left(3,\frac{a}{2}\right)$上单调递减.

3.【解】(1)当$a=2$时，$f(x)=xe^x-(x+1)^2$，则$f'(x)=e^x+xe^x-2(x+1)=(x+1)(e^x-2)$，所以$f'(0)=-1$，又$f(0)=-1$，所以曲线$y=f(x)$在点$(0,f(0))$处的切线方程为$y+1=-x$，即$x+y+1=0$.

(2)因为$f(x)=xe^x-\frac{a}{2}(x+1)^2$，$x\in\mathbf{R}$，

所以$f'(x)=e^x+xe^x-a(x+1)=(x+1)(e^x-a)$.

当$a\leqslant 0$时，$e^x-a>0$，令$f'(x)>0$，得$x>-1$，令$f'(x)<0$，得$x<-1$，所以$f(x)$在$(-\infty,-1)$上单调递减，在$(-1,+\infty)$上单调递增.

当$a>0$时，令$f'(x)=0$，解得$x=-1$或$x=\ln a$.

当$a=\frac{1}{e}$时，$f'(x)\geqslant 0$且不恒为0，

所以$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上单调递增.

当$a>\frac{1}{e}$时，$\ln a>-1$，令$f'(x)>0$，解得$x<-1$或$x>\ln a$，令$f'(x)<0$，解得$-1<x<\ln a$，

所以$f(x)$在$(-\infty,-1)$和$(\ln a,+\infty)$上单调递增，在$(-1,\ln a)$上单调递减.

当$0<a<\frac{1}{e}$时，$\ln a<-1$，令$f'(x)>0$，解得$x<\ln a$或$x>-1$，令$f'(x)<0$，解得

$\ln a<x<-1$,

所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,\ln a)$ 和 $(-1,+\infty)$ 上单调递增,在 $(\ln a,-1)$ 上单调递减.

综上,当 $a\leqslant 0$ 时,$f(x)$ 在 $(-\infty,-1)$ 上单调递减,在 $(-1,+\infty)$ 上单调递增;

当 $a=\frac{1}{e}$ 时,$f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调递增;

当 $a>\frac{1}{e}$ 时,$f(x)$ 在 $(-\infty,-1)$ 和 $(\ln a,+\infty)$ 上单调递增,在 $(-1,\ln a)$ 上单调递减;

当 $0<a<\frac{1}{e}$ 时,$f(x)$ 在 $(-\infty,\ln a)$ 和 $(-1,+\infty)$ 上单调递增,在 $(\ln a,-1)$ 上单调递减.

4.【解】(1)若 $a=-1$,则 $f(x)=-x^2-x-\ln(-x)(x<0)$,

所以 $f(-1)=0,f'(x)=-2x-1-\frac{1}{x}$,

$f'(-1)=2$,

故函数 $f(x)$ 的图象在点 $(-1,f(-1))$ 处的切线方程为 $y=2x+2$,

即 $2x-y+2=0$.

(2)因为 $a<0$,所以 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,0)$. $f'(x)=\frac{2ax^2-x-1}{x}$,

设 $u(x)=2ax^2-x-1(a<0,x<0)$,

令 $2ax^2-x-1=0$.

当 $\Delta=1+8a\leqslant 0$,即 $a\leqslant-\frac{1}{8}$ 时,$u(x)\leqslant 0,f'(x)\geqslant 0,f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递增;

当 $\Delta=1+8a>0$,即 $-\frac{1}{8}<a<0$ 时,方程 $2ax^2-x-1=0$ 的解为 $x_1=\frac{1+\sqrt{1+8a}}{4a}$,

$x_2=\frac{1-\sqrt{1+8a}}{4a}$,且 $x_1<x_2<0$,

当 $x\in(-\infty,x_1)\cup(x_2,0)$ 时，$u(x)<0$，$f'(x)>0$，当 $x\in(x_1,x_2)$ 时，$u(x)>0$，$f'(x)<0$，

故 $f(x)$ 在 $\left(-\infty,\frac{1+\sqrt{1+8a}}{4a}\right)$ 和 $\left(\frac{1-\sqrt{1+8a}}{4a},0\right)$ 上单调递增，在 $\left(\frac{1+\sqrt{1+8a}}{4a},\frac{1-\sqrt{1+8a}}{4a}\right)$ 上单调递减.

综上，当 $a\leqslant-\frac{1}{8}$ 时，$f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递增；

当 $-\frac{1}{8}<a<0$ 时，$f(x)$ 在 $\left(-\infty,\frac{1+\sqrt{1+8a}}{4a}\right)$ 和 $\left(\frac{1-\sqrt{1+8a}}{4a},0\right)$ 上单调递增，在 $\left(\frac{1+\sqrt{1+8a}}{4a},\frac{1-\sqrt{1+8a}}{4a}\right)$ 上单调递减.

方法总结 研究函数的单调性的步骤

(1)确定函数的定义域.

(2)研究导函数的正负，若可以进行因式分解，则讨论每个因式的正负；若不能进行因式分解，有二次函数考虑判别式，进而求根求得单调性，若没有二次函数，则需进一步求导，直到能判断导函数的正负即可.

专题上分 7 恒成立与能成立问题

1. 攻略上分 不等式恒成立问题，可利用大招攻略25中的分离参数法求参数的取值范围.

【解】(1)$f'(x)=\dfrac{x-a}{x}+\ln x(x>0)$，由于 $x=1$ 为 $f(x)$ 的极值点，所以 $f'(1)=1-a=0$，解得 $a=1$.

当 $a=1$ 时，令 $g(x)=f'(x)=\dfrac{x-1}{x}+\ln x(x>0)$，则 $g'(x)=\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x}>0$，

所以 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，又 $g(1)=0$，

所以当 $x\in(0,1)$ 时，$f'(x)=g(x)<g(1)=0$，$f(x)$ 单调递减，

当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$f'(x)=g(x)>g(1)=0$，$f(x)$ 单调递增，

即 $x=1$ 为 $f(x)$ 的极值点，满足题意.

故 $a=1$.

(2)由题意有 $(x-a)\ln x\geqslant x+a-1$ 对于 $x\geqslant 1$ 恒成立，

即 $x\ln x-x+1\geqslant a\ln x+a$ 对于 $x\geqslant 1$ 恒成立，

当 $x\geqslant 1$ 时，$\ln x+1\geqslant 1$，故 $a\leqslant\dfrac{x\ln x-x+1}{\ln x+1}$ 对于 $x\geqslant 1$ 恒成立.

令 $h(x)=\dfrac{x\ln x-x+1}{\ln x+1}$，则当 $x\geqslant 1$ 时，

$$h'(x)=\frac{(\ln x)^2+1-\frac{1}{x}}{(\ln x+1)^2}=\frac{(\ln x)^2}{(\ln x+1)^2}+\frac{x-1}{x(\ln x+1)^2}\geqslant 0,$$

当且仅当 $x=1$ 时，$h'(x)=0$ 成立，所以 $h(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上单调递增，所以 $h(x)\geqslant h(1)=0$，所以 $a\leqslant 0$，即 a 的取值范围是 $(-\infty,0]$.

一题多解 (2)当 $x\geqslant 1$ 时，

$f(x)\geqslant x+a-1$ 恒成立，

即当 $x=1$ 时，有 $f(1)\geqslant 1+a-1$，

解得 $a\leqslant 0$.

下面证明充分性，

即证当 $a\leqslant 0,x\geqslant 1$ 时，$f(x)\geqslant x+a-1$ 恒成立，

即证当 $a\leqslant 0,x\geqslant 1$ 时，$(x-a)\ln x-x-a+1\geqslant 0$ 恒成立.

记 $G(a)=-(\ln x+1)a+x\ln x-x+1$ $(a\leqslant 0,x\geqslant 1)$，

因为 $x\geqslant 1$，

所以 $-(\ln x+1)<0$，

故 $G(a)$ 在 $a\in(-\infty,0]$ 上单调递减，则 $G(a)\geqslant G(0)=x\ln x-x+1$.

记 $r(x)=x\ln x-x+1(x\geqslant 1)$，则 $r'(x)=\ln x$，当 $x\geqslant 1$ 时，$r'(x)\geqslant 0$，当且仅当 $x=1$ 时，$r'(x)=0$ 成立，

即 $r(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上单调递增，故 $r(x)\geqslant r(1)=0$，故当 $a\leqslant 0,x\geqslant 1$ 时，$f(x)\geqslant x+a-1$ 恒成立.

所以 a 的取值范围是 $(-\infty,0]$.

2.【解】(1)当 $a=1$ 时，

$f(x)=x^2-x-\ln x$，$\therefore f(1)=0$，

$\because f'(x)=2x-1-\dfrac{1}{x}$，

$\therefore f'(1)=0$，

$\therefore$ 曲线 $y=f(x)$ 在 $x=1$ 处的切线方程为 $y=0$.

(2)$f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，$f'(x)=2ax+a-2-\dfrac{1}{x}=\dfrac{2ax^2+(a-2)x-1}{x}=\dfrac{(ax-1)(2x+1)}{x}$.

①当 $a\leqslant 0$ 时，$f'(x)<0$ 恒成立，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减.

②当 $a>0$ 时，令 $f'(x)>0$，得 $x>\dfrac{1}{a}$，令 $f'(x)<0$，得 $0<x<\dfrac{1}{a}$，

$\therefore f(x)$ 在 $\left(0,\frac{1}{a}\right)$ 上单调递减，在 $\left(\frac{1}{a},+\infty\right)$ 上单调递增.

综上，当 $a\leqslant 0$ 时，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减；

当 $a>0$ 时，$f(x)$ 在 $\left(0,\frac{1}{a}\right)$ 上单调递减，在 $\left(\frac{1}{a},+\infty\right)$ 上单调递增.

(3) $f(x)+2x=ax^2+ax-\ln x>0$,

即 $a(x^2+x)>\ln x$，$\because x>0$，$\therefore a>\frac{\ln x}{x^2+x}$.

设 $g(x)=\frac{\ln x}{x^2+x}(x>0)$,

则 $g'(x)=\frac{x+1-(2x+1)\ln x}{(x^2+x)^2}$.

设 $h(x)=x+1-(2x+1)\ln x(x>0)$，则 $h'(x)=1-\left[2\ln x+(2x+1)\cdot\frac{1}{x}\right]=-2\ln x-1-\frac{1}{x}$.

设 $p(x)=-2\ln x-1-\frac{1}{x}(x>0)$,

则 $p'(x)=\frac{-2}{x}+\frac{1}{x^2}=\frac{-2x+1}{x^2}$,

令 $p'(x)>0$，得 $0<x<\frac{1}{2}$,

令 $p'(x)<0$，得 $x>\frac{1}{2}$.

$\therefore$ 当 $x\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$ 时，$p(x)$ 单调递增，

当 $x\in\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$ 时，$p(x)$ 单调递减，

$\therefore p(x)\leqslant p\left(\frac{1}{2}\right)=2\ln 2-3<0$，即 $h'(x)<0$，$\therefore h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减.

$\because h(1)=2>0$，$h(2)=3-5\ln 2=3-\ln 32=\ln e^3-\ln 32<\ln 27-\ln 32<0$,

$\therefore \exists x_0\in(1,2)$，使 $h(x_0)=x_0+1-(2x_0+1)\ln x_0=0$,

$\therefore$ 当 $x\in(0,x_0)$ 时，$h(x)>0$，从而 $g'(x)>0$，$g(x)$ 在 $(0,x_0)$ 上单调递增，

当 $x\in(x_0,+\infty)$ 时，$h(x)<0$，从而 $g'(x)<0$，$g(x)$ 在 $(x_0,+\infty)$ 上单调递减，

$\therefore g(x)_{\max}=g(x_0)=\dfrac{\ln x_0}{x_0^2+x_0}$.

由 $h(x_0)=x_0+1-(2x_0+1)\ln x_0=0$，得 $\ln x_0=\dfrac{x_0+1}{2x_0+1}$，$\therefore g(x_0)=\dfrac{\ln x_0}{x_0^2+x_0}=\dfrac{\frac{x_0+1}{2x_0+1}}{x_0^2+x_0}=\dfrac{1}{x_0(2x_0+1)}$，

$\because x_0\in(1,2)$，$\therefore x_0(2x_0+1)\in(3,10)$，

$\therefore g(x_0)=\dfrac{1}{x_0(2x_0+1)}\in\left(\dfrac{1}{10},\dfrac{1}{3}\right)$，

$\therefore$ 整数 a 的最小值为 1.

3. 攻略上分 不等式能成立问题，可利用大招攻略 25 中的最值转化法求参数的取值范围.

【解】(1) 因为 $f(x)=\dfrac{1}{3}x^3+x^2+ax$，所以 $f'(x)=x^2+2x+a$，

又因为函数 $f(x)$ 在区间 $[2,+\infty)$ 上单调递增，所以当 $x\in[2,+\infty)$ 时，$f'(x)\geqslant 0$，

所以 $x^2+2x+a\geqslant 0$ 在 $x\in[2,+\infty)$ 时恒成立，又 $y=x^2+2x+a$ 在 $[2,+\infty)$ 上单调递增，

所以 $f'(2)=4+4+a\geqslant 0$，

所以 $a\geqslant -8$.

所以实数 a 的最小值为 -8.

(2) 函数 $g(x)=\dfrac{x}{e^x}$，对 $\forall x_1\in[1,3]$，$\exists x_2\in[1,3]$，使 $f(x_1)\leqslant g(x_2)$ 成立，

所以 $f(x_1)_{\max}\leqslant g(x_2)_{\max}$.

提示：翻译题干得到 $f(x_1)_{\max}\leqslant g(x_2)_{\max}$

$g'(x)=\dfrac{e^x-e^x x}{e^{2x}}=\dfrac{1-x}{e^x}$，当 $x\in[1,3]$ 时，$g'(x)\leqslant 0$ 且不恒为 0，$g(x)$ 单调递减，

所以 $g(x)$ 在 $[1,3]$ 上的最大值为

$g(1)=\frac{1}{e}$.

提示：求导研究函数 $g(x)$ 在 $[1,3]$ 上的最大值

因为 $f(x)=\frac{1}{3}x^3+x^2+ax$，所以 $f'(x)=x^2+2x+a$，

因为 $y=x^2+2x+a$ 在 $[1,3]$ 上单调递增，所以当 $x\in[1,3]$ 时，$f'(x)\in[3+a,15+a]$.

当 $a\leqslant-15$ 时，$f'(x)\leqslant0$ 且不恒为 0，$f(x)$ 单调递减，所以 $f(x)$ 在 $[1,3]$ 上的最大值为 $f(1)=\frac{4}{3}+a$，所以 $\frac{4}{3}+a\leqslant\frac{1}{e}$，解得 $a\leqslant\frac{1}{e}-\frac{4}{3}$，又 $a\leqslant-15$，所以 $a\leqslant-15$.

当 $-15<a<-3$ 时，$\exists x_0\in[1,3]$，使 $f'(x_0)=0$，当 $x\in[1,x_0]$ 时，$f'(x)\leqslant0$，$f(x)$ 单调递减，当 $x\in[x_0,3]$ 时，$f'(x)\geqslant0$，$f(x)$ 单调递增，因为 $f(3)=18+3a$，$f(1)=a+\frac{4}{3}$，所以 $f(x)$ 在 $[1,3]$ 上的最大值是 $f(1)$，$f(3)$ 中较大的，所以 $18+3a\leqslant\frac{1}{e}$ 且 $\frac{4}{3}+a\leqslant\frac{1}{e}$，又 $-15<a<-3$，所以 $-15<a\leqslant\frac{1}{3e}-6$.

当 $a\geqslant-3$ 时，$f'(x)\geqslant0$ 且不恒为 0，$f(x)$ 单调递增，所以 $f(x)$ 在 $[1,3]$ 上的最大值为 $f(3)=18+3a$，所以 $18+3a\leqslant\frac{1}{e}$，又 $a\geqslant-3$，故 a 无解.

综上，实数 a 的取值范围是 $\left(-\infty,\frac{1}{3e}-6\right]$.

4. (1)【解】因为函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的图象在 $x=0$ 处有相同的切线，所以 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $x=0$ 处有相同的函数值，即 $f(0)=g(0)$，则 $1-b=0$，解得 $b=1$，经检验，符合题意，故 $b=1$.

(2)【证明】当 $b=1$ 时，$f(x)=a^x-1$，$g(x)=-x^2+x\ln a$，

构造函数 $F(x)=f(x)-g(x)=a^x-1-(-x^2+x\ln a)=a^x+x^2-x\ln a-1(x\geqslant 0)$，

$F'(x)=(a^x-1)\ln a+2x$.

当 $a>1$ 时，$\ln a>0$，当 $x\geqslant 0$ 时，$a^x-1\geqslant 0$，则 $F'(x)=(a^x-1)\ln a+2x\geqslant 0$ 且不恒为 0，所以 $F(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增，则 $F(x)\geqslant F(0)=0$，所以 $f(x)\geqslant g(x)$.

当 $0<a<1$ 时，$\ln a<0$，当 $x\geqslant 0$ 时，$a^x-1\leqslant 0$，则 $F'(x)=(a^x-1)\ln a+2x\geqslant 0$ 且不恒为 0，所以 $F(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增，则 $F(x)\geqslant F(0)=0$，所以 $f(x)\geqslant g(x)$. 得证.

(3)【解】当 $b=0$ 时，$h(x)=f(x)-g(x)=a^x+x^2-x\ln a(-1\leqslant x\leqslant 1)$，

$h'(x)=(a^x-1)\ln a+2x$.

当 $a>1$ 时，$\ln a>0$，$h'(x)$ 在 $[-1,1]$ 上单调递增，且 $h'(0)=0$，当 $x\in[-1,0)$ 时，$h'(x)<0$，$h(x)$ 单调递减，当 $x\in(0,1]$ 时，$h'(x)>0$，$h(x)$ 单调递增，所以 $h(x)_{\min}=h(0)=1$，$h(x)_{\max}=\max\{h(-1),h(1)\}$，$h(-1)=\dfrac{1}{a}+1+\ln a$，

$h(1)=a+1-\ln a$，$h(1)-h(-1)=a-\dfrac{1}{a}-2\ln a$.

令 $G(a)=a-\dfrac{1}{a}-2\ln a(a>1)$，

则 $G'(a)=\left(1-\dfrac{1}{a}\right)^2>0$，

所以 $G(a)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，

$G(a)>G(1)=0$，即 $h(1)>h(-1)$.

由题得 $h(x)_{\max}-h(x)_{\min}=h(1)-h(0)=a+1-\ln a-1=a-\ln a\geqslant e-1$.

令 $m(a)=a-\ln a$，$a>1$，

则 $m'(a)=1-\dfrac{1}{a}=\dfrac{a-1}{a}>0$，

所以 $m(a)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，

又 $m(e)=e-1$，所以 $a\geqslant e$.

当 $0<a<1$ 时，$\ln a<0$，$h'(x)$ 在 $[-1,1]$ 上单调递增，且 $h'(0)=0$，

当 $x\in[-1,0)$ 时，$h'(x)<0$，$h(x)$ 单调递减，当 $x\in(0,1]$ 时，$h'(x)>0$，$h(x)$ 单调递增，所以 $h(x)_{\min}=h(0)=1$，

$h(x)_{\max}=\max\{h(-1),h(1)\}$，

$h(-1)=\dfrac{1}{a}+1+\ln a$，$h(1)=a+1-\ln a$，

$h(-1)-h(1)=\dfrac{1}{a}-a+2\ln a$.

令 $H(a)=\dfrac{1}{a}-a+2\ln a(0<a<1)$，求导得 $H'(a)=-\left(\dfrac{1}{a}-1\right)^2<0$，所以 $H(a)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减，$H(a)>H(1)=0$，即 $h(-1)>h(1)$.

由题得 $h(x)_{\max}-h(x)_{\min}=h(-1)-h(0)=\dfrac{1}{a}+\ln a\geqslant e-1$.

令 $n(a)=\dfrac{1}{a}+\ln a$，$0<a<1$，则 $n'(a)=-\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{a}=\dfrac{a-1}{a^2}<0$，所以 $n(a)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减，又 $n\left(\dfrac{1}{e}\right)=e-1$，

所以 $0<a\leqslant\dfrac{1}{e}$.

综上，实数 a 的取值范围是 $\left(0,\dfrac{1}{e}\right]\cup[e,+\infty)$.

专题上分 8 利用导数研究函数的零点

1. C 【解析】由题设 $f'(x)=\dfrac{1}{x}-1=\dfrac{1-x}{x}$，函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，

当 $0<x<1$ 时，$f'(x)>0$，当 $x>1$ 时，$f'(x)<0$，所以 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增，在 $(1,+\infty)$ 上单调递减，故 $f(x)\leqslant$

$f(1)=7$，当 $x\to 0$ 时，$f(x)\to-\infty$，当 $x\to+\infty$ 时，$f(x)\to-\infty$，故 $f(x)$ 在定义域上有 2 个零点. **故选 C.**

提示：函数的最值决定了函数图象最高点的位置，结合极限情况判断零点个数

2. 2 【解析】$f(x)=x^3-|3x-2|=\begin{cases}x^3-3x+2, x\geqslant\frac{2}{3},\\ x^3+3x-2, x<\frac{2}{3}.\end{cases}$

点拨：将含绝对值的函数去绝对值符号转化为分段函数，便于分别研究其单调性和零点

当 $x\geqslant\frac{2}{3}$ 时，$f(x)=x^3-3x+2$，则 $f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$，

当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，函数 $f(x)$ 单调递增，当 $x\in\left(\frac{2}{3},1\right)$ 时，$f'(x)<0$，函数 $f(x)$ 单调递减，

又 $f(1)=1^3-3+2=0$，所以函数 $f(x)=x^3-3x+2\left(x\geqslant\frac{2}{3}\right)$ 只有 1 个零点.

当 $x<\frac{2}{3}$ 时，$f(x)=x^3+3x-2$，则 $f'(x)=3x^2+3>0$，故函数 $f(x)$ 在 $\left(-\infty,\frac{2}{3}\right)$ 上单调递增，又 $f\left(\frac{2}{3}\right)=\left(\frac{2}{3}\right)^3+3\times\frac{2}{3}-2=\frac{8}{27}>0$，$f(0)=-2<0$，所以由零点存在定理可知，函数 $f(x)$ 在 $\left(-\infty,\frac{2}{3}\right)$ 上有 1 个零点.

综上，函数 $f(x)=x^3-|3x-2|$ 的零点个数为 2.

3.【解】(1) $f(x)=\frac{ae^{x-a}}{x}-a$，其定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，$f'(x)=\frac{ae^{x-a}\cdot x-ae^{x-a}}{x^2}=\frac{ae^{x-a}(x-1)}{x^2}$.

因为 $a>0$,由 $f'(x)>0$ 得 $x>1$,

由 $f'(x)<0$ 得 $x<0$ 或 $0<x<1$,

所以函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 和 $(0,1)$ 上单调递减,

在 $(1,+\infty)$ 上单调递增,所以 $f(x)$ 在 $x=1$ 处取极小值,

且极小值为 $f(1)=a(e^{1-a}-1)$,无极大值.

(2) 因为 $a>0$,所以当 $x<0$ 时,有 $f(x)=\frac{ae^{x-a}}{x}-a<0$,此时 $f(x)$ 无零点.

当 $x>0$ 时,由(1)知,$f(x)$ 在 $x=1$ 处取极小值 $f(1)=a(e^{1-a}-1)$.

①当 $a=1$ 时,$f(x)$ 在 $x=1$ 处取极小值 0,此时 $f(x)$ 恰有 1 个零点.

②当 $0<a<1$ 时,$f(x)$ 在 $x=1$ 处取极小值 $f(1)=a(e^{1-a}-1)>a(e^0-1)=0$,此时 $f(x)$ 无零点.

③当 $a>1$ 时,$f(x)$ 在 $x=1$ 处取极小值 $f(1)=a(e^{1-a}-1)<a(e^0-1)=0$.

下面证明:当 $x>0$ 时,$e^x\geqslant ex$.

令 $g(x)=e^x-ex(x>0)$,

则 $g'(x)=e^x-e=e(e^{x-1}-1)$,

当 $x\in(0,1)$ 时,$g'(x)<0$,$g(x)$ 单调递减,

当 $x\in(1,+\infty)$ 时,$g'(x)>0$,$g(x)$ 单调递增,

所以 $g(x)\geqslant g(1)=0$,

即 $e^x\geqslant ex$,

当且仅当 $x=1$ 时等号成立.

所以 $f(2a)=a\left(\frac{e^a}{2a}-1\right)\geqslant a\left(\frac{e}{2}-1\right)>0$,又当 $x\to0^+$ 时,$f(x)\to+\infty$.

所以 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 和 $(1,+\infty)$ 上各有 1 个零点,此时 $f(x)$ 共有 2 个零点.

综上,当 $0<a<1$ 时,$f(x)$ 无零点;当 $a=1$ 时,$f(x)$ 有 1 个零点;当 $a>1$ 时,$f(x)$ 有 2 个零点.

4. C

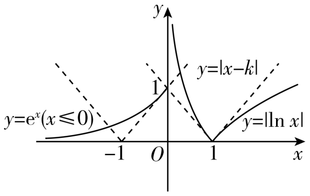
思路导引 根据函数与方程的关系，将函数图象的零点个数问题转化为方程的根的个数问题，进一步转化为两函数图象的交点个数问题，结合函数图象观察求解即可.

【解析】由题意知，$g(x)=f(x)-|x-k|$ 恰有 2 个零点，即 $g(x)=0$ 有 2 个实数根.

当 $x>0$ 时，$g(x)=|\ln x|-|x-k|$，令 $g(x)=0$，可得 $|\ln x|=|x-k|$；

当 $x\leqslant 0$ 时，$g(x)=e^x-|x-k|$，令 $g(x)=0$，可得 $|x-k|=e^x$.

在同一平面直角坐标系下，作出函数 $y=|\ln x|$，$y=e^x(x\leqslant 0)$ 和 $y=|x-k|$ 的大致图象，如图所示.



由函数 $y=\ln x$，可得 $y'=\dfrac{1}{x}$，当 $x=1$ 时，$y=0$，$y'|_{x=1}=1$，故曲线 $y=\ln x$ 在 $x=1$ 处的切线方程为 $y=x-1$，

又由函数 $y=-\ln x$，可得 $y'=-\dfrac{1}{x}$，当 $x=1$ 时，$y=0$，$y'|_{x=1}=-1$，

故曲线 $y=-\ln x$ 在 $x=1$ 处的切线方程为 $y=-x+1$. 所以函数 $y=|\ln x|$ 与 $y=|x-1|$ 的图象只有 1 个公共点.

易知曲线 $y=e^x$ 与直线 $y=x+1$ 相切.

结合图象可得，当 $k\leqslant -1$ 时，$g(x)$ 恰有 3 个零点；当 $-1<k\leqslant 1$ 时，$g(x)$ 恰有 2 个零点；当 $k>1$ 时，$g(x)$ 恰有 3 个零点. 故要使函数 $g(x)$ 恰有 2 个零点，则 $-1<k\leqslant 1$，所以实数 k 的取值范围为 $(-1,1]$. **故选 C.**

5. D 【解析】因为 $f(x)=x^2(1-e^x)+x(\ln x+a)$ 有 2 个零点，故 $x^2(1-e^x)+$

$x(\ln x+a)=0$ 有 2 个不同的解，由题知，$x>0$，

所以 $x(1-e^x)+\ln x+a=0$ 有 2 个不同的解，

点拨：该式同时包含指数函数、对数函数，直接分析比较困难，可考虑指对互化变形

故 $x+\ln x+a-e^{x+\ln x}=0$ 有 2 个不同的解.

设 $t=x+\ln x(x>0)$，则 $t'=1+\dfrac{1}{x}>0$，故 $t=x+\ln x$ 为 $(0,+\infty)$ 上的增函数，而当 $x\to0$ 时，$t\to-\infty$，当 $x\to+\infty$ 时，$t\to+\infty$，故 $t=x+\ln x$ 的值域为 $\mathbf{R}$，故 $t+a-e^t=0$ 在 $\mathbf{R}$ 上有 2 个零点.

设 $s(t)=t+a-e^t$，则 $s'(t)=1-e^t$，

当 $t<0$ 时，$s'(t)>0$，当 $t>0$ 时，$s'(t)<0$，故 $s(t)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递增，在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，故 $s(t)_{\max}=s(0)=a-1$. 由 $a-1>0$ 得 $a>1$，此时当 $t\to+\infty$ 时，$s(t)\to-\infty$，当 $t\to-\infty$ 时，$s(t)\to-\infty$，故当 $a>1$ 时，$s(t)$ 有 2 个零点. 故实数 a 的取值范围为 $(1,+\infty)$. **故选 D.**

6. **思路导引** (1) 求导，分析函数的单调性，可求函数的最大值.

(2) 先求导得 $f'(x)=\dfrac{(ae^x-1)(e^x-1)}{e^x}$，分 $a<0$，$a=0$，$0<a<1$，$a=1$，$a>1$ 讨论函数的单调性，结合极值的符号，判断函数零点个数，求参数取值范围.

【解】 (1) 当 $a=0$ 时，$f(x)=-e^{-x}-x$，

$f'(x)=e^{-x}-1$.

由 $f'(x)>0$，可得 $x<0$；

由 $f'(x)<0$，可得 $x>0$.

所以函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递增，在 $(0,+\infty)$ 上单调递减.

所以函数 $f(x)$ 的最大值为 $f(0)=-1$.

(2)因为$f(x)=ae^x-e^{-x}-(a+1)x$,

所以 $f'(x)=ae^x+e^{-x}-(a+1)=\dfrac{(ae^x-1)(e^x-1)}{e^x}$.

由(1)知,当 $a=0$ 时,函数 $f(x)$ 无零点.

当 $a<0$ 时,$ae^x-1<0$,由 $f'(x)>0$,可得 $x<0$;由 $f'(x)<0$,可得 $x>0$.

所以函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递增,在 $(0,+\infty)$ 上单调递减.

此时函数 $f(x)$ 的最大值为 $f(0)=a-1<0$,所以当 $a<0$ 时,函数 $f(x)$ 无零点.

当 $a>0$ 时,若 $0<a<1$,则 $\dfrac{1}{a}>1$,由 $f'(x)>0$,可得$\left(e^x-\dfrac{1}{a}\right)(e^x-1)>0$,即 $e^x<1$ 或 $e^x>\dfrac{1}{a}$,即 $x<0$ 或 $x>-\ln a$;

由 $f'(x)<0$,可得 $0<x<-\ln a$.

所以函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$,$(-\ln a,+\infty)$上单调递增,在 $(0,-\ln a)$ 上单调递减.

又极大值 $f(0)=a-1<0$,所以极小值 $f(-\ln a)=1-a+(a+1)\ln a<0$,

且当 $x\to+\infty$ 时,$f(x)\to+\infty$,

所以此时函数 $f(x)$ 只在 $(-\ln a,+\infty)$ 上有 1 个零点.

若 $a=1$,则 $f'(x)=\dfrac{(e^x-1)^2}{e^x}\geqslant 0$ 恒成立,所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调递增,此时 $f(x)=e^x-e^{-x}-2x$,因为 $f(0)=0$,所以此时函数 $f(x)$ 只有 1 个零点.

当 $a>1$ 时,$0<\dfrac{1}{a}<1$,由 $f'(x)>0$,可得 $e^x<\dfrac{1}{a}$或 $e^x>1$,即 $x<-\ln a$ 或 $x>0$;

由 $f'(x)<0$,可得$-\ln a<x<0$.

所以函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,-\ln a)$,$(0,+\infty)$上单调递增,在 $(-\ln a,0)$ 上单调递减,

所以极小值 $f(0)=a-1>0$,

且当 $x\to-\infty$ 时, $f(x)\to-\infty$,

所以此时函数 $f(x)$ 只在 $(-\infty,-\ln a)$ 上有 1 个零点.

综上所述,若函数 $f(x)$ 恰有 1 个零点,则 a 的取值范围为 $(0,+\infty)$.

7. **攻略上分** 第(2)问通过分离参数构造新的函数后,研究其导函数,无法求出该导函数的零点,可通过单调性及隐零点求解.

【解】(1) $\because f(x)=ke^{2x}+(k+2)e^x+x$,

$\therefore f'(x)=2ke^{2x}+(k+2)e^x+1=(ke^x+1)(2e^x+1)$.

①当 $k\geqslant0$ 时, $f'(x)>0$, $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增.

②当 $k<0$ 时,由 $f'(x)=0$,得 $x=\ln\left(-\frac{1}{k}\right)$,令 $f'(x)>0$,得 $x<\ln\left(-\frac{1}{k}\right)$,令 $f'(x)<0$,得 $x>\ln\left(-\frac{1}{k}\right)$,

$\therefore f(x)$ 在 $\left(-\infty,\ln\left(-\frac{1}{k}\right)\right)$ 上单调递增,在 $\left(\ln\left(-\frac{1}{k}\right),+\infty\right)$ 上单调递减.

综上,当 $k\geqslant0$ 时, $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增;

当 $k<0$ 时, $f(x)$ 在 $\left(-\infty,\ln\left(-\frac{1}{k}\right)\right)$ 上单调递增,在 $\left(\ln\left(-\frac{1}{k}\right),+\infty\right)$ 上单调递减.

(2)当 $k=0$ 时, $g(x)=xf(x)-x^2-2\ln x-mx-2=2xe^x-2\ln x-mx-2\geqslant0(x>0)$ 恒成立,即 $\frac{m}{2}\leqslant\frac{xe^x-\ln x-1}{x}(x>0)$ 恒成立.

令 $h(x)=\frac{xe^x-\ln x-1}{x}(x>0)$,只需 $h(x)_{\min}\geqslant\frac{m}{2}$ 恒成立.

$h'(x)=\dfrac{x^2e^x+\ln x}{x^2}$.

令 $\varphi(x)=x^2e^x+\ln x(x>0)$，则 $\varphi'(x)=2xe^x+x^2e^x+\dfrac{1}{x}$，

当 $x\in(0,+\infty)$ 时，$\varphi'(x)>0$，$\varphi(x)$ 单调递增，

$\because \varphi\left(\dfrac{1}{e}\right)=\dfrac{e^{\frac{1}{e}}}{e^2}-1<0$，$\varphi(1)=e>0$，

$\therefore \exists x_0\in\left(\dfrac{1}{e},1\right)$，

使得 $\varphi(x_0)=x_0^2e^{x_0}+\ln x_0=0$，即 $x_0e^{x_0}=\dfrac{1}{x_0}\ln\dfrac{1}{x_0}$.

令 $t(x)=xe^x(x>0)$，则 $t(x_0)=t\left(\ln\dfrac{1}{x_0}\right)$，

$\because t'(x)=e^x+xe^x=e^x(x+1)>0$，$\therefore$ 当 $x>0$ 时，$t(x)$ 单调递增，$\therefore x_0=\ln\dfrac{1}{x_0}=-\ln x_0$，即 $e^{x_0}=\dfrac{1}{x_0}$.

当 $x\in(0,x_0)$ 时，$\varphi(x)<0$，$h'(x)<0$，$h(x)$ 单调递减，

当 $x\in(x_0,+\infty)$ 时，$\varphi(x)>0$，$h'(x)>0$，$h(x)$ 单调递增，

故 $h(x)$ 在 $x=x_0$ 处取得最小值 $h(x_0)$，

又 $h(x_0)=\dfrac{x_0e^{x_0}-\ln x_0-1}{x_0}=\dfrac{x_0\cdot\dfrac{1}{x_0}-\ln x_0-1}{x_0}=\dfrac{1+x_0-1}{x_0}=1$，

$\therefore h(x)_{\min}=1\geqslant\dfrac{m}{2}$，

解得 $m\leqslant 2$.

故 m 的取值范围为 $(-\infty,2]$.

一题多解 (2)令 $p(x)=e^x-x-1$，则 $p'(x)=e^x-1$，令 $p'(x)=0$，得 $x=0$，$\therefore$ 当 $x\in(-\infty,0)$ 时，$p'(x)<0$，$p(x)$ 单调递减，当 $x\in(0,+\infty)$ 时，$p'(x)>0$，$p(x)$ 单调递增，

$\therefore p(x)\geqslant p(0)=0$，

即 $e^x-x-1\geqslant 0$(当且仅当 $x=0$ 时,等号成立),①

$g(x)=xf(x)-x^2-2\ln x-mx-2=2xe^x-2\ln x-mx-2=2(xe^x-\ln x-1)-mx=2[e^{x+\ln x}-(\ln x+x)-1]+(2-m)x,x>0$,由①知 $e^{x+\ln x}-(\ln x+x)-1\geqslant 0$,当且仅当 $\ln x+x=0$ 时,等号成立.

设 $q(x)=\ln x+x,x>0$,则 $q'(x)=\dfrac{1}{x}+1>0$,$q(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增,

$q\left(\dfrac{1}{e}\right)=-1+\dfrac{1}{e}<0,q(1)=1>0$,

$\therefore \exists x_0\in\left(\dfrac{1}{e},1\right)$,使得 $q(x_0)=0$,

$\therefore$ 当 $2-m\geqslant 0$,即 $m\leqslant 2$ 时,$(2-m)x\geqslant 0$,$\therefore g(x)\geqslant 0$ 恒成立,

当 $2-m<0$,即 $m>2$ 时,$\because x>0$,$\therefore g(x)<2[e^{x+\ln x}-(\ln x+x)-1]$,则必有 $g(x_0)<2[e^{x_0+\ln x_0}-(\ln x_0+x_0)-1]=0$,$\therefore \exists x_0$ 使得 $g(x_0)<0$,不符合题意.

综上可知,$m\leqslant 2$.

故 m 的取值范围为 $(-\infty,2]$.

8. (1)【解】$f(x)=(x+1)e^x$,$f'(x)=e^x+e^x(x+1)=e^x(x+2)$.

令 $f'(x)=0$,解得 $x=-2$,

当 $x<-2$ 时,$f'(x)<0$,$f(x)$ 单调递减,

当 $x>-2$ 时,$f'(x)>0$,$f(x)$ 单调递增,

因此,$x=-2$ 是 $f(x)$ 的极小值点,极小值 $f(-2)=(-2+1)e^{-2}=-\dfrac{1}{e^2}$.

综上,$y=f(x)$ 的极小值为 $-\dfrac{1}{e^2}$,无极大值.

(2)【解】函数 $g(x)=x-a\ln x+1$ 的定义域为 $(0,+\infty)$,$g'(x)=1-\dfrac{a}{x}$.

当 $a\leqslant 0$ 时,$g'(x)>0$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立,$g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增.

当 $a>0$ 时,令 $g'(x)=0$,解得 $x=a$,

当 $0<x<a$ 时，$g'(x)<0$，$g(x)$ 单调递减，

当 $x>a$ 时，$g'(x)>0$，$g(x)$ 单调递增.

综上，当 $a\leqslant 0$ 时，$g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增；

当 $a>0$ 时，$g(x)$ 在 $(0,a)$ 上单调递减，在 $(a,+\infty)$ 上单调递增.

(3)【证明】当 $a=-1$ 时，$g(x)=x+\ln x+1$，

定义域为 $(0,+\infty)$，

$f(x)-e^x=(x+1)e^x-e^x=xe^x$.

要证 $g(x)\leqslant f(x)-e^x$，

即证 $x+\ln x+1\leqslant xe^x$，

即证 $xe^x-x-\ln x-1\geqslant 0$.

令 $h(x)=xe^x-x-\ln x-1$，其定义域为 $(0,+\infty)$，

$h'(x)=e^x+xe^x-1-\dfrac{1}{x}=(x+1)\cdot\left(e^x-\dfrac{1}{x}\right)$，

其中 $x+1>0$ 恒成立，

易知 $\exists x_0\in(0,+\infty)$，满足 $e^{x_0}-\dfrac{1}{x_0}=0$，

当 $0<x<x_0$ 时，$e^x-\dfrac{1}{x}<0$，

$h'(x)=(x+1)\left(e^x-\dfrac{1}{x}\right)<0$，

$h(x)$ 单调递减，

当 $x>x_0$ 时，$e^x-\dfrac{1}{x}>0$，

$h'(x)=(x+1)\cdot\left(e^x-\dfrac{1}{x}\right)>0$，

$h(x)$ 单调递增，

因此 $h(x)=xe^x-x-\ln x-1$ 的最小值为 $h(x_0)=x_0e^{x_0}-x_0-\ln x_0-1$，

由 $e^{x_0}-\dfrac{1}{x_0}=0$，可知 $e^{x_0}=\dfrac{1}{x_0}$，$x_0=\dfrac{1}{e^{x_0}}=e^{-x_0}$，

所以 $h(x_0)=x_0\cdot\dfrac{1}{x_0}-x_0-\ln e^{-x_0}-1=1-x_0-(-x_0)-1=0$，

即 $h(x)=xe^x-x-\ln x-1$ 的最小值为 0.

综上，$h(x)=xe^x-x-\ln x-1\geqslant 0$，即 $g(x)\leqslant f(x)-e^x$ 得证.

专题上分 9 构造法在导数中的应用

1. D

攻略上分 题目所给的不等式中含有导函数，考虑利用大招攻略 27 中的方法进行逆向构造.

【解析】设 $g(x)=\dfrac{f(x)}{x}(x>1)$，则

$g'(x)=\dfrac{xf'(x)-f(x)}{x^2}$.

因为 $xf'(x)<f(x)$，

所以 $g'(x)<0$，

故 $g(x)$ 在区间 $(1,+\infty)$ 上单调递减，

又 $f(3)=6$，$f(\ln x)>2\ln x$，

所以 $\begin{cases}\dfrac{f(\ln x)}{\ln x}>2=\dfrac{f(3)}{3},\\ \ln x>1,\end{cases}$

解得 $1<\ln x<3$，即 $e<x<e^3$.

2. C 【解析】令 $g(x)=\dfrac{f(x)}{\sin x}$，$x\in\left[-\dfrac{\pi}{2},0\right)\cup\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right]$，

由函数 $y=f(x)$ 是奇函数，

得 $g(-x)=\dfrac{f(-x)}{\sin(-x)}=\dfrac{-f(x)}{-\sin x}=g(x)$，

函数 $g(x)$ 是偶函数.

$g'(x)=\dfrac{f'(x)\sin x-f(x)\cos x}{\sin^2 x}$.

因为任意 $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right]$，

满足 $f'(x)\sin x-f(x)\cos x>0$，

所以任意 $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right]$，$g'(x)>0$，

所以 $g(x)$ 在 $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ 上单调递增，又 $g(x)$ 为偶函数，所以 $g(x)$ 在 $\left[-\dfrac{\pi}{2},0\right)$ 上单调递减.

对于 A，由 $-\dfrac{\pi}{3}<-\dfrac{\pi}{6}$，得 $g\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)>$

$g\left(-\frac{\pi}{6}\right)$，所以$\frac{f\left(-\frac{\pi}{3}\right)}{\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)}>\frac{f\left(-\frac{\pi}{6}\right)}{\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)}$，

化简得$\sqrt{3}f\left(-\frac{\pi}{6}\right)>f\left(-\frac{\pi}{3}\right)$，A 错误；

对于 B，由$\frac{\pi}{3}>\frac{\pi}{6}$，得 $g\left(\frac{\pi}{3}\right)>g\left(\frac{\pi}{6}\right)$，

所以$\frac{f\left(\frac{\pi}{3}\right)}{\sin\frac{\pi}{3}}>\frac{f\left(\frac{\pi}{6}\right)}{\sin\frac{\pi}{6}}$，化简得 $f\left(\frac{\pi}{3}\right)>$

$\sqrt{3}f\left(\frac{\pi}{6}\right)$，B 错误；

对于 C，由 $\left|-\frac{\pi}{6}\right|<\left|\frac{\pi}{4}\right|$，得

$g\left(-\frac{\pi}{6}\right)=g\left(\frac{\pi}{6}\right)<g\left(\frac{\pi}{4}\right)$，所以

$\frac{f\left(-\frac{\pi}{6}\right)}{\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)}=\frac{f\left(\frac{\pi}{6}\right)}{\sin\frac{\pi}{6}}<\frac{f\left(\frac{\pi}{4}\right)}{\sin\frac{\pi}{4}}$，化简得

$f\left(\frac{\pi}{4}\right)>-\sqrt{2}f\left(-\frac{\pi}{6}\right)$，C 正确；

对于 D，由 $\left|-\frac{\pi}{4}\right|<\left|\frac{\pi}{2}\right|$，得

$g\left(-\frac{\pi}{4}\right)=g\left(\frac{\pi}{4}\right)<g\left(\frac{\pi}{2}\right)$，所以

$\frac{f\left(-\frac{\pi}{4}\right)}{\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)}=\frac{f\left(\frac{\pi}{4}\right)}{\sin\frac{\pi}{4}}<\frac{f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\sin\frac{\pi}{2}}$，化简得

$\sqrt{2}f\left(-\frac{\pi}{4}\right)>-f\left(\frac{\pi}{2}\right)$，D 错误. 故选 C.

3. C

攻略上分 a 和 b 的表达式中都含有对数，考虑通过大招攻略 28 中的同构方法，转化成同构函数的单调性问题，进而比较大小.

【解析】设 $f(x)=\frac{x}{\ln x}(x\geqslant e)$，

提示：将相同部分替换为 x，构造同构函数

则 $f'(x)=\frac{\ln x-1}{\ln^2 x}$，

当 $x\geqslant e$ 时，$f'(x)\geqslant 0$，所以 $f(x)$ 在 $[e,+\infty)$ 上单调递增，

又 $a=\frac{\frac{e^2}{2}}{\ln\frac{e^2}{2}}=f\left(\frac{e^2}{2}\right)$，$b=\frac{2}{\ln 2}=\frac{4}{\ln 4}=f(4)$，$c=e=\frac{e}{\ln e}=f(e)$，又 $e<\frac{e^2}{2}<4$，所以 $c<a<b$. **故选** C.

4. D 【解析】$\because$ $3y+\log_3 y=2$，$\therefore$ $3y+\log_3 y+1=3$，即 $3y+\log_3(3y)=3$，$\log_3(3y)+3^{\log_3(3y)}=3$.

令 $f(u)=u+3^u$，$u\in\mathbf{R}$，则 $f(\log_3(3y))=3$，又 $x+3^x=3$，即 $f(x)=3$，$\therefore$ $f(x)=f(\log_3(3y))=3$.

$\because$ $f'(u)=1+3^u\ln 3>0$，$\therefore$ $f(u)=u+3^u$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增，

$\therefore$ $x=\log_3(3y)$，$\therefore$ $3^x=3y$，$\therefore$ $x+3y=x+3^x=3$. **故选** D.

5. $\left[e+\frac{1}{e},+\infty\right)$

攻略上分 本题构造的函数与 e^x，$\ln x$ 有关，故可利用通法攻略 24 中的图象和性质解题.

【解析】由 $f(x_1)\cdot g(x_2)=x_1x_2$，得 $\frac{f(x_1)}{x_1}=\frac{1}{\frac{g(x_2)}{x_2}}$.

设 $F(x)=\frac{f(x)}{x}=\frac{\ln x}{x}-a$，$x\in(0,+\infty)$，

则 $F'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$，

当 $0<x<e$ 时，$F'(x)>0$，则 $F(x)$ 在 $(0,e)$ 上单调递增，

当 $x>e$ 时，$F'(x)<0$，则 $F(x)$ 在 $(e,+\infty)$ 上单调递减，

所以 $F(x)_{\max}=F(e)=\frac{1}{e}-a$，且当 $x\to 0$ 时，$F(x)\to-\infty$，当 $x\to+\infty$ 时，$F(x)\to-a$，故 $F(x)$ 的值域为 $\left(-\infty,\frac{1}{e}-a\right]$.

设 $G(x)=\frac{g(x)}{x}=\frac{e^x}{x}-a$，$x\in(0,+\infty)$，

则 $G'(x)=\frac{e^x(x-1)}{x^2}$，

当 $0<x<1$ 时，$G'(x)<0$，则 $G(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减，

当 $x>1$ 时，$G'(x)>0$，则 $G(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，

所以 $G(x)_{\min}=G(1)=\mathrm{e}-a$，且当 $x\to0$ 时，$G(x)\to+\infty$；当 $x\to+\infty$ 时，$G(x)\to+\infty$，故 $G(x)$ 的值域为 $[\mathrm{e}-a,+\infty)$.

依题意，$F(x)$ 的值域是 $\dfrac{1}{G(x)}$ 的值域的子集，

显然 $a\neq\mathrm{e}$，若 $a<\mathrm{e}$，则 $\dfrac{1}{G(x)}$ 的值域为 $\left(0,\dfrac{1}{\mathrm{e}-a}\right]$，不合题意，舍去，

若 $a>\mathrm{e}$，则 $\dfrac{1}{G(x)}$ 的值域为 $\left(-\infty,\dfrac{1}{\mathrm{e}-a}\right]\cup(0,+\infty)$，则需 $F(x)$ 的值域 $\left(-\infty,\dfrac{1}{\mathrm{e}}-a\right]\subseteq\left(-\infty,\dfrac{1}{\mathrm{e}-a}\right]\cup(0,+\infty)$，

则 $\begin{cases}a>\mathrm{e},\\ \dfrac{1}{\mathrm{e}}-a\leqslant\dfrac{1}{\mathrm{e}-a},\end{cases}$ 解得 $a\geqslant\mathrm{e}+\dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

综上，实数 a 的取值范围为 $\left[\mathrm{e}+\dfrac{1}{\mathrm{e}},+\infty\right)$.

6.【解】(1) 当 $k=0$ 时，函数 $f(x)=\mathrm{e}^x$ 与函数 $g(x)=\ln x$ 互为反函数，两个函数的图象关于直线 $l:y=x$ 对称，函数 $h(x)=1-x$ 的图象也关于直线 $l:y=x$ 对称，所以点 P，点 Q 关于直线 $l:y=x$ 对称.

综上可知，点 M 为函数 $h(x)=1-x$ 的图象与直线 $l:y=x$ 的交点，计算可得点 M 的坐标为 $\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)$.

(2) 不等式 $f(x)\geqslant g(x)$ 对 $\forall x\in(0,+\infty)$ 恒成立等价于 $\mathrm{e}^{x+k}+k\geqslant\ln x$ 对 $\forall x\in(0,+\infty)$ 恒成立，即 $\mathrm{e}^{x+k}+x+k\geqslant x+\ln x=\mathrm{e}^{\ln x}+\ln x$ 对 $\forall x\in(0,+\infty)$ 恒成立.

构造函数 $F(x)=\mathrm{e}^x+x$，

上述不等式等价于 $F(x+k)\geqslant F(\ln x)$，$x>0$.

易知 $F(x)$ 为增函数，所以 $x+k\geqslant\ln x$，即 $k\geqslant\ln x-x$.

设函数 $G(x)=\ln x-x(x>0)$，求导可得 $G'(x)=\dfrac{1-x}{x}$，

当 $x\in(0,1)$ 时，$G'(x)>0$，当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$G'(x)<0$，

由此可得 $G(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增，在 $(1,+\infty)$ 上单调递减，

$G(x)_{\max}=G(1)=-1$，故 k 的取值范围是 $[-1,+\infty)$.

(3) $H(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，由函数 $H(x)=e^{x+k}+(k+1)x-x\ln x$，可得 $H'(x)=e^{x+k}+k-\ln x$，

由(2)可知，当 $k\in[-1,+\infty)$ 时，$H'(x)\geqslant0$，所以 $H(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，所以函数 $H(x)$ 至多只有一个零点.

所以当函数 $H(x)=e^{x+k}+(k+1)x-x\ln x$ 至少有两个相异的零点时，$k<-1$，又因为 k 为整数，所以不妨令 $k=-2$，则 $H(x)=e^{x-2}-x-x\ln x$，当 $x\to0$ 时，$H(x)\to e^{-2}>0$，$H(1)=e^{-1}-1<0$，当 $x\to+\infty$ 时，$H(x)\to+\infty$，

此时函数 $H(x)$ 至少存在两个零点，由此可得整数 k 的最大值为 -2.

专题上分 10 不等式放缩问题

1. **攻略上分** 第(2)问通过对 $g(x)=f(x)-e^x$ 求导，导函数中出现 $\dfrac{1}{x+1}$ 及 e^x，考虑通过切线放缩对 $g'(x)$ 进行放大，然后利用基本不等式证明.

(1)【解】当 $a=1$ 时，$f(x)=x-\ln(x+1)+1$，定义域为 $(-1,+\infty)$，$f'(x)=\dfrac{x}{x+1}$，当 $-1<x<0$ 时，$f'(x)<0$，当 $x>0$ 时，$f'(x)>0$. 因此 $f(x)$ 在 $(-1,0)$ 上单调递减，在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，故 $f(x)$ 的最小值为 $f(0)=1$.

(2)【证明】令 $g(x)=f(x)-e^x=ax-\ln(x+1)+1-e^x(-1<x<0)$，$g'(x)=a-\dfrac{1}{x+1}-e^x$，

由(1)可知 $x-\ln(x+1)+1\geqslant 1$，当且仅当 $x=0$ 时取等号，因此 $x\geqslant\ln(x+1)$，即 $e^x\geqslant x+1$，当且仅当 $x=0$ 时取等号.

所以 $g'(x)=a-\dfrac{1}{x+1}-e^x<a-\dfrac{1}{x+1}-(x+1)<a-2\leqslant 0$，

故 $g(x)$ 在 $(-1,0)$ 上单调递减，$g(x)>g(0)=0$，即当 $-1<x<0$ 时，$f(x)>e^x$.

2. (1)【解】由题知 $f'(x)=\dfrac{1}{x}-a-\dfrac{a}{x^2}=-\dfrac{ax^2-x+a}{x^2}(x>0)$，

设函数 $g(x)=ax^2-x+a(x>0)$，

当 $a\geqslant\dfrac{1}{2}$ 时，$g(x)$ 的图象开口向上，$\Delta=1-4a^2\leqslant 0$，所以 $f'(x)\leqslant 0$，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，无极值点，

当 $0<a<\dfrac{1}{2}$ 时，方程 $g(x)=0$ 在 $(0,+\infty)$ 上有两个解，设两个解为 x_1,x_2，且 $x_1<x_2$，所以 $x_1=\dfrac{1-\sqrt{1-4a^2}}{2a}$，$x_2=\dfrac{1+\sqrt{1-4a^2}}{2a}$，又因为 $x_1x_2=1$，所以 $x_1\in(0,1)$，$x_2\in(1,+\infty)$，所以 $f(x)$ 在 $(0,x_1)$ 上单调递减，在 (x_1,x_2) 上单调递增，在 $(x_2,+\infty)$ 上单调递减，所以 $f(x)$ 有两个极值点.

综上，当 $a\geqslant\dfrac{1}{2}$ 时，$f(x)$ 无极值点；当 $0<a<\dfrac{1}{2}$ 时，$f(x)$ 有两个极值点.

(2)【证明】(ⅰ)由(1)知，$0<a<\dfrac{1}{2}$，且 $x_1x_2=1$，

又因为 $f\left(\dfrac{1}{x}\right)=\ln\dfrac{1}{x}-a\left(\dfrac{1}{x}-x\right)=-\ln x+a\left(x-\dfrac{1}{x}\right)=-f(x)$，

所以 $f(x_1)+f(x_2)=f(x_1)+f\left(\dfrac{1}{x_1}\right)=0$.

(ⅱ)由(ⅰ)知 $f\left(\dfrac{1}{x}\right)=-f(x)$，$0<a<$

$\frac{1}{2}$，因为 $f(1)=-f(1)$，所以 $f(1)=0=f(t_2)$，由题意知 $t_1<x_1<t_2=1<x_2<t_3$，又 $f(t_1)=-f\left(\frac{1}{t_1}\right)=0=f\left(\frac{1}{t_1}\right)=f(t_3)$，所以 $t_1t_3=1$，所以 $t_1t_2t_3=1$.

令 $h(x)=x\ln x, x>0, h'(x)=\ln x+1$，所以 $h(x)$ 在 $\left(0,\frac{1}{e}\right)$ 上单调递减，在 $\left(\frac{1}{e},+\infty\right)$ 上单调递增.

因为 $x>1$ 时，$h(x)>0$，$0<x<1$ 时，$h(x)<0$，所以 $0<m<\frac{1}{e}<n<1$.

要证明 $\frac{(1-m)e^{-m}}{t_1t_2t_3}>n(\ln n+1)$，只需证 $(1-m)e^{-m}>n(\ln n+1)$，即证 $\ln[(1-m)e^{-m}]>\ln[n(\ln n+1)]$，即证 $\ln(1-m)-m>\ln n+\ln(\ln n+1)$，即证 $\ln(1-m)+1-m>\ln n+1+\ln(\ln n+1)$.

令 $t(x)=\ln x+x, x>0$，易知 $t(x)=\ln x+x$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，所以只需证 $1-m>\ln n+1$.

令 $v(x)=x-(\ln x+1)\left(\frac{1}{e}<x<1\right)$，所以 $v'(x)=1-\frac{1}{x}=\frac{x-1}{x}<0$，所以函数 $v(x)$ 在 $\left(\frac{1}{e},1\right)$ 上单调递减，所以 $v(n)>v(1)=0$，即 $n>\ln n+1$.

提示：重要的切线放缩不等式

故要证 $1-m>\ln n+1$，只需证 $1-m>n$，即证明 $m+n<1$.

因为 $0<m<\frac{1}{e}$，所以 $\ln m<-1$，所以 $m\ln m<-m$，又因为 $m\ln m=n\ln n$，所以 $m<-n\ln n$，所以 $m+n<n-n\ln n$.

令 $\varphi(x)=x-x\ln x$，$\frac{1}{e}<x<1$，则 $\varphi'(x)=-\ln x>0$，所以 $\varphi(x)$ 在 $\left(\frac{1}{e},1\right)$ 上单调递增，所以 $\varphi(n)<\varphi(1)=1$，所以 $m+n<1$，所以 $\frac{(1-m)e^{-m}}{t_1t_2t_3}>n(\ln n+1)$ 成立.

3. **攻略上分** 第(3)问先就 $ax^2-\ln x>\sin x$ 恒成立,取 $x=1$,结合条件可推出 $a\geqslant 1$,当 $a=1$ 时,通过构造及放缩,可得到 $x^2-\ln x\geqslant x>\sin x$ $(x>0)$,即可证明不等式恒成立并确定整数 a 的最小值.

(1)【解】当 $a=1$ 时, $f(x)=x^2-\ln x$,其定义域为 $(0,+\infty)$,且 $f'(x)=2x-\dfrac{1}{x}=\dfrac{2x^2-1}{x}$,

由 $f'(x)<0$ 可得 $0<x<\dfrac{\sqrt{2}}{2}$,由 $f'(x)>0$ 可得 $x>\dfrac{\sqrt{2}}{2}$,

即函数 $f(x)$ 的单调递减区间为 $\left(0,\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$,单调递增区间为 $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2},+\infty\right)$.

(2)【证明】设 $g(x)=f(x)+\dfrac{1}{4a}-1=ax^2-\ln x+\dfrac{1}{4a}-1$,函数的定义域为 $(0,+\infty)$,且 $g'(x)=2ax-\dfrac{1}{x}=\dfrac{2ax^2-1}{x}$,

由题知 $a>0$,由 $g'(x)<0$,可得 $0<x<\sqrt{\dfrac{1}{2a}}$,由 $g'(x)>0$,可得 $x>\sqrt{\dfrac{1}{2a}}$,

即函数 $g(x)$ 在 $\left(0,\sqrt{\dfrac{1}{2a}}\right)$ 上单调递减,在 $\left(\sqrt{\dfrac{1}{2a}},+\infty\right)$ 上单调递增,

故 $g(x)_{\min}=g\left(\sqrt{\dfrac{1}{2a}}\right)=\dfrac{1}{2}-\ln\sqrt{\dfrac{1}{2a}}+\dfrac{1}{4a}-1=\dfrac{1}{2}\left[\ln(2a)+\dfrac{1}{2a}-1\right]$.

设 $h(x)=\ln x+\dfrac{1}{x}-1(x>0)$,

则 $h'(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{x-1}{x^2}$,

由 $h'(x)>0$,可得 $x>1$,由 $h'(x)<0$,可得 $0<x<1$,

则 $h(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减,在 $(1,+\infty)$ 上单调递增,

故 $h(x)_{\min}=h(1)=0$,

即当 $a>0$ 时，$\ln(2a)+\frac{1}{2a}-1\geqslant 0$，则 $g(x)\geqslant 0$，故有 $f(x)\geqslant 1-\frac{1}{4a}$.

(3)【解】不等式 $f(x)>\sin x$ 恒成立等价于 $ax^2-\ln x>\sin x$ 恒成立，则当 $x=1$ 时，$a\times 1^2-\ln 1>\sin 1$，即 $a>\sin 1$，又 $0<\sin 1<1$，且 a 是整数，所以 $a\geqslant 1$.

当 $a=1$ 时，设 $u(x)=x^2-\ln x-x(x>0)$，

则 $u'(x)=2x-\frac{1}{x}-1=\frac{2x^2-x-1}{x}=\frac{(x-1)(2x+1)}{x}$，

由 $u'(x)>0$，可得 $x>1$，由 $u'(x)<0$，可得 $0<x<1$，则函数 $u(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减，在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，故 $u(x)_{\min}=u(1)=0$，即 $x^2-\ln x\geqslant x$ 在 $x\in(0,+\infty)$ 上恒成立.

下证当 $x\in(0,+\infty)$ 时，$x>\sin x$.

设 $y=x-\sin x$，则 $y'=1-\cos x\geqslant 0$，故函数 $y=x-\sin x$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

则 $x-\sin x>0$，即 $x>\sin x$.

故当 $a=1$ 时，$x^2-\ln x\geqslant x>\sin x$ 在 $x\in(0,+\infty)$ 上恒成立，即不等式 $x^2-\ln x>\sin x$ 恒成立，符合题意.

故整数 a 的最小值为 1.

4. (1)【解】由题意知函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，$f'(x)=-\frac{a}{x}+\frac{1}{x^2}=\frac{1-ax}{x^2}$，

所以当 $a\leqslant 0$ 时，$f'(x)>0$ 在 $x\in(0,+\infty)$ 上恒成立，所以函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

当 $a>0$ 时，令 $f'(x)=0$，得 $x=\frac{1}{a}$，所以

当 $x\in\left(0,\frac{1}{a}\right)$ 时，$f'(x)>0$，当 $x\in\left(\frac{1}{a},+\infty\right)$ 时，$f'(x)<0$，

所以函数 $f(x)$ 在 $\left(0,\frac{1}{a}\right)$ 上单调递增，在 $\left(\frac{1}{a},+\infty\right)$ 上单调递减.

综上，当 $a\leqslant 0$ 时，函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增；当 $a>0$ 时，函数 $f(x)$ 在 $\left(0,\frac{1}{a}\right)$ 上单调递增，在

$\left(\frac{1}{a},+\infty\right)$上单调递减.

(2)【解】当 $x\in(0,\mathrm{e}]$ 时,$f(x)\leqslant 1$,即当 $x\in(0,\mathrm{e}]$ 时,$a\ln x+\frac{1}{x}\geqslant 0$.

令 $g(x)=a\ln x+\frac{1}{x}$, $x\in(0,\mathrm{e}]$,则

$g'(x)=\frac{a}{x}-\frac{1}{x^2}=\frac{ax-1}{x^2}$,

所以当 $a\leqslant 0$ 时,$g'(x)<0$ 在 $x\in(0,\mathrm{e}]$ 上恒成立,则 $g(x)$ 在 $(0,\mathrm{e}]$ 上单调递减,

则 $g(x)\geqslant g(\mathrm{e})=a\ln \mathrm{e}+\frac{1}{\mathrm{e}}=a+\frac{1}{\mathrm{e}}\geqslant 0$,即 $a\geqslant-\frac{1}{\mathrm{e}}$,所以 $-\frac{1}{\mathrm{e}}\leqslant a\leqslant 0$.

当 $a>0$ 时,令 $g'(x)=0$,则 $x=\frac{1}{a}$.

当 $\frac{1}{a}\geqslant \mathrm{e}$,即 $0<a\leqslant\frac{1}{\mathrm{e}}$ 时,函数 $g(x)$ 在 $(0,\mathrm{e}]$ 上单调递减,

所以 $g(x)\geqslant g(\mathrm{e})=a\ln \mathrm{e}+\frac{1}{\mathrm{e}}=a+\frac{1}{\mathrm{e}}>0$ 恒成立,所以 $0<a\leqslant\frac{1}{\mathrm{e}}$.

当 $\frac{1}{a}<\mathrm{e}$,即 $a>\frac{1}{\mathrm{e}}$ 时,函数 $g(x)$ 在 $\left(0,\frac{1}{a}\right)$ 上单调递减,在 $\left(\frac{1}{a},\mathrm{e}\right]$ 上单调递增,

所以 $g(x)\geqslant g\left(\frac{1}{a}\right)=a\ln\frac{1}{a}+a=a\left(\ln\frac{1}{a}+1\right)\geqslant 0$,即 $a\leqslant \mathrm{e}$,所以 $\frac{1}{\mathrm{e}}<a\leqslant \mathrm{e}$.

综上所述,a 的取值范围为 $\left[-\frac{1}{\mathrm{e}},\mathrm{e}\right]$.

(3)【证明】由(1)可知,当 $x\in(0,+\infty)$ 且 $a=1$ 时,$f(x)\leqslant f(1)=0$,即 $\ln x\geqslant 1-\frac{1}{x}$,$x\in(0,+\infty)$.

因为 $\frac{2k+1}{2k-1}=1+\frac{2}{2k-1}>0(k\in\mathbf{N}_+)$,所以

$\ln\frac{2k+1}{2k-1}\geqslant 1-\frac{2k-1}{2k+1}=\frac{2}{2k+1}(k\in\mathbf{N}_+)$,

所以 $\ln(2k+1)-\ln(2k-1)\geqslant\frac{2}{2k+1}(k\in\mathbf{N}_+)$,

所以 $\ln 3-\ln 1\geqslant\frac{2}{3}$，$\ln 5-\ln 3\geqslant\frac{2}{5}$，

$\ln 7-\ln 5\geqslant\frac{2}{7}$，…，$\ln(2n-1)-\ln(2n-3)\geqslant\frac{2}{2n-1}$，$\ln(2n+1)-\ln(2n-1)\geqslant\frac{2}{2n+1}$，

所以 $\ln(2n+1)-\ln 1\geqslant\frac{2}{3}+\frac{2}{5}+\cdots+\frac{2}{2n-1}+\frac{2}{2n+1}$，即 $\ln\sqrt{2n+1}\geqslant\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n+1}(n\in\mathbf{N}_+)$.

专题上分 11 极值点偏移问题

1. **攻略上分** 第(3)问要证明的是关于 x_1+x_2 的一个不等式，符合通法攻略 31 中的极值点偏移问题，所以考虑通过对称化构造法进行证明.

(1)【解】当 $a=2$ 时，函数 $f(x)=\ln x-\frac{1}{x}$，$f(1)=-1$，$f'(x)=\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}$，

$f'(1)=2$，

故函数 $f(x)$ 的图象在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程为 $y+1=2(x-1)$，即 $2x-y-3=0$.

(2)【解】根据函数 $f(x)=\ln x+\frac{1-a}{x}$，$x>0$，得导函数 $f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1-a}{x^2}=\frac{x-(1-a)}{x^2}$，$x>0$.

①当 $1-a\leqslant 0$，即 $a\geqslant 1$ 时，导函数 $f'(x)>0$，因此函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，又 $f\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)=-1+\mathrm{e}(1-a)<0$，故此时不满足题意.

②当 $1-a>0$，即 $a<1$ 时，令 $f'(x)=\frac{x-(1-a)}{x^2}=0$，得 $x=1-a$.

当 $0<x<1-a$ 时，$f'(x)<0$，函数 $f(x)$ 在 $(0,1-a)$ 上单调递减，当 $x>1-a$ 时，$f'(x)>0$，函数 $f(x)$ 在 $(1-a,+\infty)$ 上单

调递增，所以 $f(x)_{\min}=f(1-a)=\ln(1-a)+1$.

要使 $f(x)\geqslant 0$ 恒成立，则 $\ln(1-a)+1\geqslant 0$，解得 $a\leqslant 1-\frac{1}{e}$，满足 $a<1$. 综上，a 的取值范围为 $\left(-\infty,1-\frac{1}{e}\right]$.

(3)【证明】若 $f(x)$ 有两个零点 x_1,x_2，结合第(2)问知 $1-a>0$，且 $f(1-a)=\ln(1-a)+1<0$，解得 $1-\frac{1}{e}<a<1$.

当 $1-\frac{1}{e}<a<1$ 时，$f(x)_{\min}=f(1-a)<0$，

当 $x\to+\infty$ 时，$f(x)\to+\infty$，当 $x\to 0$ 时，$f(x)\to+\infty$，故此时满足 $f(x)$ 有两个零点.

下面证明 $x_1+x_2>2-2a$ 成立.

不妨设 $0<x_1<1-a<x_2$，$g(x)=f(2-2a-x)-f(x)$，$0<x<1-a$，

则 $g'(x)=-f'(2-2a-x)-f'(x)=-\frac{2-2a-x-(1-a)}{(2-2a-x)^2}-\frac{x-(1-a)}{x^2}$，

因为 $2-2a-x>1-a>x>0$，所以 $g'(x)=\frac{x-(1-a)}{(2-2a-x)^2}-\frac{x-(1-a)}{x^2}=[x-(1-a)]\left[\frac{1}{(2-2a-x)^2}-\frac{1}{x^2}\right]>0$，

所以函数 $g(x)$ 在 $(0,1-a)$ 上单调递增，所以 $g(x)<g(1-a)=0$，所以当 $0<x<1-a$ 时，$f(2-2a-x)-f(x)<0$，

故 $f(2-2a-x)<f(x)$，$x\in(0,1-a)$.

根据 $0<x_1<1-a$，可得 $f(2-2a-x_1)<f(x_1)$，

又 $f(x_1)=f(x_2)$，$2-2a-x_1>1-a$，$x_2>1-a$，

且当 $x\in(1-a,+\infty)$ 时，函数 $f(x)$ 单调递增，所以 $2-2a-x_1<x_2$，即 $x_1+x_2>2-2a$ 得证.

2. **攻略上分** 本题通过比值换元法将所证的双变量不等式通过 $t=\frac{x_2}{x_1}$ 换元化为单变量不等式，利用函数单调性证明.

【证明】易知 $a\neq 0$，由题意知 $f(x)+2=\ln x-ax+1=0,x>0$，

于是 $\begin{cases}\ln x_1+1=ax_1,\\ \ln x_2+1=ax_2.\end{cases}$

令 $\dfrac{x_2}{x_1}=t$，则由 $x_2>2x_1$ 得 $t>2$，

于是 $t=\dfrac{x_2}{x_1}=\dfrac{\ln x_2+1}{\ln x_1+1}=\dfrac{\ln t+\ln x_1+1}{\ln x_1+1}$，

即 $\ln x_1=\dfrac{\ln t}{t-1}-1$，

从而 $\ln x_2=\ln t+\ln x_1=\dfrac{t\ln t}{t-1}-1$.

对 $x_1x_2^2>\dfrac{32}{e^3}$ 两边分别取自然对数，

则有 $\ln x_1+2\ln x_2>5\ln 2-3$，

于是即证 $\dfrac{\ln t}{t-1}+\dfrac{2t\ln t}{t-1}-3>5\ln 2-3(t>2)$，即证 $\dfrac{(1+2t)\ln t}{t-1}>5\ln 2(t>2)$.

设 $g(t)=\dfrac{(1+2t)\ln t}{t-1},t>2$.

则 $g'(t)=$

$\dfrac{\left(2\ln t+\dfrac{1+2t}{t}\right)(t-1)-(1+2t)\ln t}{(t-1)^2}=\dfrac{-3\ln t+2t-\dfrac{1}{t}-1}{(t-1)^2}$，

设 $\varphi(t)=-3\ln t+2t-\dfrac{1}{t}-1,t>2$，

则 $\varphi'(t)=-\dfrac{3}{t}+2+\dfrac{1}{t^2}=\dfrac{2t^2-3t+1}{t^2}=\dfrac{(2t-1)(t-1)}{t^2}>0$ 在 $(2,+\infty)$ 上恒成立，

于是 $\varphi(t)$ 在 $(2,+\infty)$ 上单调递增，

从而 $\varphi(t)>\varphi(2)=-3\ln 2+4-\dfrac{1}{2}-1=\dfrac{5}{2}-3\ln 2>0$.

所以 $g'(t)>0$ 在 $(2,+\infty)$ 上恒成立，即 $g(t)$ 在 $(2,+\infty)$ 上单调递增，于是 $g(t)>g(2)=5\ln 2$.

因此 $x_1x_2^2>\dfrac{32}{e^3}$，

即原不等式成立.

3. 攻略上分 第(2)问中整理化简函数时，得到含有对数式的式子，考虑利用对数均值不等式法进行证明.

(1)【解】当 $a=-1$ 时，函数 $f(x)=-2\ln x-\frac{1}{x^2}+1$，其定义域为 $(0,+\infty)$，

$f'(x)=-\frac{2}{x}+\frac{2}{x^3}=\frac{2(1-x^2)}{x^3}$，

当 $x\in(0,1)$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增，当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减，

所以函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处取得极大值 $f(1)=0$，无极小值.

(2)【证明】$f(x)=-2\ln x+\frac{a}{x^2}+1$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，$f'(x)=-\frac{2x^2+2a}{x^3}$.

当 $a\geqslant 0$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，无极值.

当 $a<0$ 时，由 $f'(x)>0$，得 $0<x<\sqrt{-a}$，由 $f'(x)<0$，得 $x>\sqrt{-a}$，所以函数 $f(x)$ 在 $(0,\sqrt{-a})$ 上单调递增，在 $(\sqrt{-a},+\infty)$ 上单调递减，所以函数 $f(x)$ 在 $x=\sqrt{-a}$ 处取得极大值，函数 $f(x)$ 无极小值，故 $x_0=\sqrt{-a}$.

由函数 $f(x)$ 有两个零点 x_1,x_2，可知 $f(\sqrt{-a})=-\ln(-a)>0$，解得 $-1<a<0$.

设 $h(x)=\ln x-x$，求导得 $h'(x)=\frac{1}{x}-1=\frac{1-x}{x}$，当 $x\in(0,1)$ 时，$h'(x)>0$，当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$h'(x)<0$，

所以函数 $h(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增，在 $(1,+\infty)$ 上单调递减，

则 $h(x)\leqslant h(1)=-1<0$，

所以 $\ln x<x$，

则 $2f(x_0)=2\ln\left(-\frac{1}{a}\right)<-\frac{2}{a}$.

由 x_1,x_2 是函数 $f(x)$ 的两个零点，得

$-2\ln x_1+\frac{a}{x_1^2}+1=0,-2\ln x_2+\frac{a}{x_2^2}+1=0,$

两式相减整理得$-\frac{1}{a}=\frac{x_2^2-x_1^2}{2x_1^2x_2^2\ln\frac{x_2}{x_1}}$.

不妨令$x_2>x_1>0$，因为$2f(x_0)<-\frac{2}{a}=2\cdot\frac{x_2^2-x_1^2}{2x_1^2x_2^2\ln\frac{x_2}{x_1}}$，所以若$\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}>2\cdot\frac{x_2^2-x_1^2}{2x_1^2x_2^2\ln\frac{x_2}{x_1}}$成立，则$\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}>2f(x_0)$成立，下面证明$\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}>2\cdot\frac{x_2^2-x_1^2}{2x_1^2x_2^2\ln\frac{x_2}{x_1}}$，

即证明$\ln\frac{x_2^2}{x_1^2}>\frac{2\left(\frac{x_2^2}{x_1^2}-1\right)}{\frac{x_2^2}{x_1^2}+1}$.

设$\frac{x_2^2}{x_1^2}=t$，$t\in(1,+\infty)$，$g(t)=\ln t-\frac{2(t-1)}{t+1}(t>1)$，则$g'(t)=\frac{1}{t}-\frac{4}{(t+1)^2}=\frac{(t-1)^2}{t(t+1)^2}>0$，所以函数$g(t)$在$(1,+\infty)$上单调递增，则$g(t)=\ln t-\frac{2(t-1)}{t+1}>g(1)=0$，即$\ln t>\frac{2(t-1)}{t+1}$成立.

所以$\ln\frac{x_2^2}{x_1^2}>\frac{2\left(\frac{x_2^2}{x_1^2}-1\right)}{\frac{x_2^2}{x_1^2}+1}$，所以$\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}>2f(x_0)$.

4. (1)【解】因为$b=1$，所以$g(x)=x-\frac{\ln x}{x}$，所以$g'(x)=\frac{x^2+\ln x-1}{x^2}$.

令$h(x)=x^2+\ln x-1$，因为$h(x)$为$(0,+\infty)$上的增函数，且$h(1)=0$，

所以当$0<x<1$时，$g'(x)<0$，当$x>1$时，$g'(x)>0$，所以$g(x)$在$(0,1)$上单调递减，在$(1,+\infty)$上单调递增，所以$g(x)_{\min}=g(1)=1$.

因为$f(x)=xe^x-ax+1(a>0,x>-1)$，所以$f'(x)=(x+1)e^x-a$.

令$m(x)=(x+1)e^x-a(a>0,x>-1)$，则$m'(x)=(x+2)e^x>0$，所以$f'(x)$在

$(-1,+\infty)$上单调递增，

又$f'(-1)=-a<0$，

当$x\to+\infty$时，$f'(x)\to+\infty$，故方程$(x+1)e^x-a=0$在$(-1,+\infty)$上有唯一解，

所以存在唯一的$x_0\in(-1,+\infty)$，使得$f'(x_0)=0$，即$(x_0+1)e^{x_0}-a=0$，故$a=(x_0+1)e^{x_0}$. 当$-1<x<x_0$时，$f'(x)<0$，当$x>x_0$时，$f'(x)>0$，

所以$f(x)$在$(-1,x_0)$上单调递减，在$(x_0,+\infty)$上单调递增，所以$f(x)_{\min}=f(x_0)=x_0e^{x_0}-ax_0+1=-x_0^2e^{x_0}+1=1$，

解得$x_0=0$，故$a=1$.

(2)【**证明**】由题意，$g(x)$有两个零点x_1,x_2，则$\begin{cases}bx_1=\dfrac{\ln x_1}{x_1},\\ bx_2=\dfrac{\ln x_2}{x_2},\end{cases}$即$\begin{cases}2bx_1^2=\ln x_1^2,\\ 2bx_2^2=\ln x_2^2,\end{cases}$

等价于方程$2bt=\ln t$有两个根t_1,t_2，证明$t_1t_2>e^2$.

不妨令$t_1>t_2>0$，

由$\begin{cases}2bt_1=\ln t_1,\\ 2bt_2=\ln t_2,\end{cases}$可得$2b=\dfrac{\ln t_1-\ln t_2}{t_1-t_2}=\dfrac{\ln t_1+\ln t_2}{t_1+t_2}$.

要证$t_1t_2>e^2$，只需要证明$\ln t_1+\ln t_2>2$，

即证$\ln t_1+\ln t_2=2b(t_1+t_2)=(t_1+t_2)\dfrac{\ln t_1-\ln t_2}{t_1-t_2}>2$，

即证$\ln t_1-\ln t_2>\dfrac{2(t_1-t_2)}{t_1+t_2}$，即证$\ln\dfrac{t_1}{t_2}>\dfrac{2\left(\dfrac{t_1}{t_2}-1\right)}{\dfrac{t_1}{t_2}+1}$.

令$m=\dfrac{t_1}{t_2}$，$m>1$，只需证明$\ln m>\dfrac{2(m-1)}{m+1}(m>1)$.

令$s(m)=\ln m-\dfrac{2(m-1)}{m+1}(m>1)$，则$s'(m)=\dfrac{(m-1)^2}{m(m+1)^2}>0$，即$s(m)$在$(1,+\infty)$上单调递增，

所以$s(m)>s(1)=0$，所以$\ln m>$

$\frac{2(m-1)}{m+1}(m>1)$.

故 $x_1x_2>e$,得证.

专题上分 12 导数中的双变量问题

1. 攻略上分 第(3)问中通过整理要证不等式,发现不等式中含有 x_2-x_1 形式的部分,考虑对双变量进行换元.

(1)【解】由 $f(x)=e^x+x-3$,得 $f'(x)=e^x+1$. $f(0)=-2$,$f'(0)=2$,

所以曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,f(0))$ 处的切线方程为 $y+2=2(x-0)$,即 $2x-y-2=0$.

(2)【解】由题设,当 $x\geqslant 0$ 时,$e^x-ax-3\geqslant\frac{x^2}{2}-2$,即 $e^x-\frac{x^2}{2}-ax-1\geqslant 0$,

令 $g(x)=e^x-\frac{x^2}{2}-ax-1(x\geqslant 0)$,则 $g'(x)=e^x-x-a(x\geqslant 0)$,

令 $h(x)=g'(x)$,则 $h'(x)=e^x-1\geqslant 0$,

故 $h(x)=g'(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增,所以 $g'(x)\geqslant g'(0)=1-a$,

当 $1-a\geqslant 0$,即 $a\leqslant 1$ 时,$g'(x)\geqslant 0$,则 $g(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增,$g(x)\geqslant g(0)=0$,符合题意.

当 $1-a<0$,即 $a>1$ 时,$g'(0)<0$,当 $x\to+\infty$ 时,$g'(x)\to+\infty$,所以 $\exists x_0\in(0,+\infty)$,使 $g'(x_0)=0$,即在 $[0,x_0)$ 上,$g'(x)<0$,$g(x)$ 在 $[0,x_0)$ 上单调递减.

当 $x\in(0,x_0)$ 时,$g(x)<g(0)=0$,不符合题意.

综上,a 的取值范围是 $(-\infty,1]$.

(3)【证明】由 $f(x_1)=f(x_2)=0$,得 $e^{x_1}=ax_1+3$,$e^{x_2}=ax_2+3$,所以 $e^{x_2}-e^{x_1}=a(x_2-x_1)$,故 $a=\frac{e^{x_2}-e^{x_1}}{x_2-x_1}$.

要证 $3e^{x_1}+e^{x_2}>3a$,需证 $3e^{x_1}+e^{x_2}>\frac{3(e^{x_2}-e^{x_1})}{x_2-x_1}$,即证 $\frac{3e^{x_1}+e^{x_2}}{e^{x_2}-e^{x_1}}>\frac{3}{x_2-x_1}$,即证 $\frac{e^{x_2-x_1}+3}{e^{x_2-x_1}-1}>\frac{3}{x_2-x_1}$.

令 $t=x_2-x_1$,因为 $x_1<x_2$,所以 $t>0$,则需

证$\frac{e^t+3}{e^t-1}>\frac{3}{t}$，即证 $te^t+3t>3e^t-3$，即证 $\frac{(t-3)e^t}{t+1}+3>0$.

令 $F(t)=\frac{(t-3)e^t}{t+1}+3,t>0$，

则 $F'(t)=\frac{(t-1)^2e^t}{(t+1)^2}\geqslant 0$，

所以 $F(t)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，所以 $F(t)>F(0)=0$，即$\frac{(t-3)e^t}{t+1}+3>0$，所以 $3e^{x_1}+e^{x_2}>3a$，得证.

2. (1)【解】函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，$f'(x)=x-4+\frac{a}{x}=\frac{x^2-4x+a}{x}$，$x\in(0,+\infty)$，因为函数 $f(x)=\frac{x^2}{2}-4x+a\ln x\ (a\in\mathbf{R})$ 有两个极值点，所以 $\frac{x^2-4x+a}{x}=0$ 有两个不等正根，所以方程 $x^2-4x+a=0$ 有两个不等正根 x_1,x_2，

所以$\begin{cases}\Delta=(-4)^2-4a>0,\\ x_1x_2=a>0,\end{cases}$解得 $0<a<4$.

因为 $x_1+x_2=4$，所以 x_1,x_2 是两个不等正根，满足题意，

所以实数 a 的取值范围为 $(0,4)$.

(2)【证明】由 (1) 知 $x_1x_2=a$，$x_1+x_2=4$，

所以 $f(x_1)+f(x_2)=\frac{1}{2}(x_1^2+x_2^2)-4(x_1+x_2)+a\ln(x_1x_2)=a\ln a-a-8$，

所以 $f(x_1)+f(x_2)+10-\ln a=(a-1)\ln a-a+2$.

令 $g(x)=(x-1)\ln x-x+2(0<x<4)$，则 $g'(x)=\ln x-\frac{1}{x}(0<x<4)$，

令 $h(x)=g'(x)=\ln x-\frac{1}{x}(0<x<4)$，则 $h'(x)=\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}>0$，所以 $g'(x)$ 在 $(0,4)$ 上单调递增.

因为 $g'(2)=\ln 2-\frac{1}{2}>0$，$g'(1)=-1<0$，所以函数 $g'(x)$ 存在唯一零点 $x_0\in(1,2)$，则 $\ln x_0=\frac{1}{x_0}$.

当 $x\in(0,x_0)$ 时，$g'(x)<0$，$g(x)$ 单调递减，当 $x\in(x_0,4)$ 时，$g'(x)>0$，$g(x)$ 单调递增，

当 $x=x_0$ 时，$g(x)$ 存在最小值，即 $g(x)_{\min}=g(x_0)=(x_0-1)\ln x_0-x_0+2=3-\left(x_0+\dfrac{1}{x_0}\right)$.

因为 $x_0\in(1,2)$，所以 $2<x_0+\dfrac{1}{x_0}<\dfrac{5}{2}$，

所以 $g(x)_{\min}>0$，所以 $f(x_1)+f(x_2)+10>\ln a$.

3. **攻略上分** 第(3)问要证的不等式中含有两个参数，求其中一个参数的取值范围时，可以考虑将另一个参数定为函数主元.

【解】(1)当 $a=b=1$ 时，$f(x)=x-\ln x$，$x>0$，所以 $f'(x)=1-\dfrac{1}{x}$，$x>0$，

设过原点的切线与 $f(x)$ 的图象相切于点 $(t,t-\ln t)$，则切线方程为 $y-(t-\ln t)=\left(1-\dfrac{1}{t}\right)(x-t)$，

又该切线过原点，所以 $0-(t-\ln t)=\left(1-\dfrac{1}{t}\right)(0-t)$，解得 $t=e$，所以切线方程为 $y=\left(1-\dfrac{1}{e}\right)x$，即 $(e-1)x-ey=0$.

(2)因为 $f(x)=x^a-a\ln(bx)$，$x>0$，所以 $f'(x)=ax^{a-1}-\dfrac{a}{x}=\dfrac{a(x^a-1)}{x}$，$x>0$.

若 $a>0$，当 $x>1$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增，当 $0<x<1$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减；

若 $a<0$，当 $x>1$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增，当 $0<x<1$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减.

综上，函数 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减，在 $(1,+\infty)$ 上单调递增.

(3) $x^a+b\geqslant 2+a\ln(bx)$ 等价于 $f(x)=x^a-a\ln(bx)\geqslant 2-b$，由单调性知等价于 $f(x)_{\min}=f(1)=1-a\ln b\geqslant 2-b$，即 $a\ln b-b+1\leqslant 0$.

构造函数分类讨论，令 $g(x)=a\ln x-x+1(x>0)$.

提示：选择参数 b 作为主元，讨论参数 a

若 $a<0$，则 $g'(x)=\dfrac{a-x}{x}<0$，$g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，当 $x\in(0,1)$ 时，

$g(x)>g(1)=0$，不符合题意.

若 $0<a<1$，令 $g'(x)=0$，得 $x=a$，当 $x\in(a,1)$ 时，$g'(x)<0$，$g(x)$ 单调递减，故当 $x\in(a,1)$ 时，$g(x)>g(1)=0$，不符合题意.

若 $a>1$，当 $x\in(1,a)$ 时，$g'(x)>0$，$g(x)$ 单调递增，故当 $x\in(1,a)$ 时，$g(x)>g(1)=0$，不符合题意.

若 $a=1$，当 $x\in(0,1)$ 时，$g'(x)>0$，$g(x)$ 单调递增，当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$g'(x)<0$，$g(x)$ 单调递减，则 $g(x)_{\max}=g(1)=0$，所以当 $a=1$ 时，$a\ln b-b+1\leqslant 0$.

综上，a 的取值集合为 $\{1\}$.

4. (1)【解】函数 $f(x)=x\ln x\ (x>0)$，则 $f'(x)=1+\ln x$，

令 $f'(x)=0$，解得 $x=\dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

当 $x\in\left(0,\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减，当 $x\in\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}},+\infty\right)$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增，

因此 $f(x)$ 的极小值为 $f\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)=-\dfrac{1}{\mathrm{e}}$，无极大值.

(2)【解】$g(x)=f(x+1)=(x+1)\ln(x+1)$，令 $h(x)=(x+1)\ln(x+1)-mx\ (x\geqslant 0)$，则 $h'(x)=\ln(x+1)+1-m$，

注意到 $h(0)=0$，若要 $h(x)\geqslant 0$，必有 $h'(0)\geqslant 0$，即 $1-m\geqslant 0$，解得 $m\leqslant 1$.

检验：当 $m\leqslant 1$ 时，$\because h'(x)=\ln(x+1)+1-m$ 单调递增，则当 $x\geqslant 0$ 时，$h'(x)=\ln(x+1)+1-m\geqslant h'(0)=1-m\geqslant 0$ 恒成立，$\therefore h(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增，故 $h(x)\geqslant h(0)=0$.

故实数 m 的取值范围为 $(-\infty,1]$.

(3)【证明】构造函数 $F(x)=a\ln a+x\ln x-(a+x)\ln\dfrac{a+x}{2}$，$x>a>0$，

则 $F'(x)=1+\ln x-\ln\dfrac{a+x}{2}-1=\ln\dfrac{2x}{a+x}$，

$\because x>a>0$，$\therefore 0<a+x<2x$，$\therefore F'(x)>0$，

$\therefore F(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 上单调递增，

$\therefore F(b)>F(a)=0$，

故 $f(a)+f(b)-2f\left(\frac{a+b}{2}\right)>0$.

构造函数 $G(x)=a\ln a+x\ln x-(a+x)\ln\frac{a+x}{2}-(x-a)\ln 2, x>a>0$,

则 $G'(x)=\ln\frac{2x}{a+x}-\ln 2=\ln\frac{x}{a+x}<0$,

则 $G(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 上单调递减,故 $G(b)<G(a)=0$, $\therefore f(a)+f(b)-2f\left(\frac{a+b}{2}\right)<(b-a)\ln 2$.

综上, $0<f(a)+f(b)-2f\left(\frac{a+b}{2}\right)<(b-a)\ln 2$.

§8 数学探究活动(二):探究函数性质(略)

真题上分

1. A 【解析】因为 $f(x)=\frac{e^x+2\sin x}{1+x^2}$,所以 $f'(x)=\frac{(e^x+2\cos x)(1+x^2)-2x(e^x+2\sin x)}{(1+x^2)^2}$,

所以 $f'(0)=3$,所以曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,1)$ 处的切线的方程为 $y=3x+1$,当 $x=0$ 时, $y=1$;当 $y=0$ 时, $x=-\frac{1}{3}$. 则所求三角形的面积 $S=\frac{1}{2}\times 1\times\left|-\frac{1}{3}\right|=\frac{1}{6}$. 故选 A.

2. 4 【解析】由 $y=e^x+x+a$,得 $y'=e^x+1$. 设切点为 $P(x_0,y_0)$,由直线 $y=2x+5$ 是曲线 $y=e^x+x+a$ 的一条切线,得 $\begin{cases}e^{x_0}+1=2,\\2x_0+5=e^{x_0}+x_0+a,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x_0=0,\\a=4.\end{cases}$

3. ln 2 【解析】令 $f(x)=e^x+x$,则 $f'(x)=e^x+1$,所以曲线 $y=e^x+x$ 在点 $(0,1)$ 处的切线斜率为 $f'(0)=2$,所以切线方程为 $y=2x+1$. 令 $g(x)=\ln(x+1)+a$,则 $g'(x)=\frac{1}{x+1}$. 因为直线 $y=2x+1$ 也是曲线 $y=g(x)$ 的切线,所以令 $\frac{1}{x+1}=2$,解得 $x=-\frac{1}{2}$,则曲线 $y=g(x)$ 与直线 $y=2x+1$ 的切点坐标为 $\left(-\frac{1}{2},0\right)$,所以 $0=a-\ln 2$,解得 $a=\ln 2$.

4. B

攻略上分 比较 a,c 的大小与 b,c 的大小时，可以通过泰勒展开式求出 a 与 c 的近似值进行比较，也可以通过构造函数，利用单调性比较.

【解析】$a=2\ln 1.01=\ln 1.01^2=\ln 1.0201>b$，**排除 A，D.**

根据泰勒展开式，$a=2\ln(1+0.01)\approx 2\times\left(0.01-\frac{0.01^2}{2}\right)=0.02-0.0001=0.0199$，$c=(1+0.04)^{\frac{1}{2}}-1\approx\frac{1}{2}\times 0.04+\frac{-\frac{1}{4}}{2}\times 0.04^2=0.02-0.0002=0.0198$，所以 $a>c$，**排除 C. 故选 B.**

一题多解 $a=2\ln 1.01=\ln 1.01^2=\ln 1.0201>b.$

令 $g(x)=\ln(1+x)-\sqrt{1+2x}+1$，则 $b-c=g(0.02)$. $g'(x)=\frac{1}{1+x}-\frac{1}{\sqrt{1+2x}}=\frac{\sqrt{1+2x}-(1+x)}{(1+x)\sqrt{1+2x}}$，当 $x\geqslant 0$ 时，$1+x=\sqrt{(1+x)^2}\geqslant\sqrt{1+2x}$，则 $g'(x)\leqslant 0$，$g(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递减，则 $g(0.02)<g(0)=0$，所以 $b<c$. 令 $f(x)=2\ln(1+x)-\sqrt{1+4x}+1$，则 $a-c=f(0.01)$. $f'(x)=\frac{2}{1+x}-\frac{2}{\sqrt{1+4x}}=2\cdot\frac{\sqrt{1+4x}-(1+x)}{(1+x)\sqrt{1+4x}}$，当 $0\leqslant x<2$ 时，$\sqrt{1+4x}\geqslant\sqrt{1+2x+x^2}=1+x$，则 $f'(x)\geqslant 0$，$f(x)$ 在 $[0,2)$ 上单调递增，所以 $f(0.01)>f(0)=0$，所以 $a>c$. 综上，$b<c<a$. **故选 B.**

5. AD 【解析】$f(x)=2x^3-3ax^2+1$，则 $f'(x)=6x^2-6ax=6x(x-a)$. A 选项，当 $a>1$ 时，$f'(x)$ 的零点为 $x_1=0$，$x_2=a$，则 $x_2>x_1$. 当 $x<0$ 时，$f'(x)>0$，当 $0<x<a$ 时，$f'(x)<0$，当 $x>a$ 时，$f'(x)>0$，则 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递增，在 $(0,a)$

上单调递减，在$(a,+\infty)$上单调递增，则$x=0$是$f(x)$的极大值点，$x=a$是$f(x)$的极小值点，又$f(0)=1>0$，$f(a)=2a^3-3a^3+1=1-a^3<0$，且$f(-a)<0$，$f(2a)>0$，所以$f(x)$有三个零点，A **正确**；B选项，当$a<0$时，易知$f(x)$在$(-\infty,a)$上单调递增，在$(a,0)$上单调递减，在$(0,+\infty)$上单调递增，所以$x=0$是$f(x)$的极小值点，B **错误**；C选项，若直线$x=b$是曲线$y=f(x)$的对称轴，则$f(x+b)=f(b-x)$，即$2(x+b)^3-3a(x+b)^2+1=2(b-x)^3-3a\cdot(b-x)^2+1$，即$x^3+3b^2x=3abx$，不存在$a$，$b$使等式恒成立，故不存在$a$，$b$，使得直线$x=b$为曲线$y=f(x)$的对称轴，C **错误**；D选项，若$(1,f(1))$为曲线$y=f(x)$的对称中心，则$f(1+x)+f(1-x)=2f(1)$，即$2(1+x)^3-3a(1+x)^2+1+2(1-x)^3-3a(1-x)^2+1=6-6a$，整理得$(12-6a)x^2-6a+6=6-6a$，解得$a=2$，所以存在$a$，使得点$(1,f(1))$为曲线$y=f(x)$的对称中心，D **正确**. **故选 AD.**

6. ABD　【解析】因为$f(x)$是定义在$\mathbf{R}$上的奇函数，所以$f(0)=0$，**故 A 正确**；

提示：若奇函数的定义域中包含0，则$f(0)=0$

当$x<0$时，$-x>0$，因此$f(-x)=[(-x)^2-3]e^{-x}+2=-f(x)$，因此$f(x)=-(x^2-3)e^{-x}-2$，**故 B 正确**；

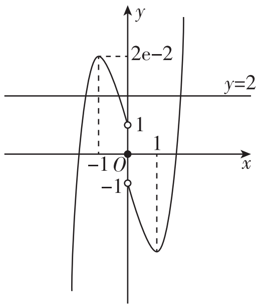
关键点　$f(-x)=-f(x)$的应用

当$x>0$时，$f(x)=(x^2-3)\cdot e^x+2$，$f'(x)=(x^2+2x-3)e^x=(x+3)(x-1)\cdot e^x$，令$f'(x)>0$，得$x>1$，令$f'(x)<0$，得$0<x<1$，因此$f(x)$在$x=1$处取得极小值，因此奇函数$f(x)$在$x=-1$处取得极大值，**故 D 正确**；

提示：奇函数在关于原点对称的区间上单调性相同

当 $x>0$ 时，$f(x)\geqslant 2$，即 $(x^2-3)e^x\geqslant 0$，解得 $x\geqslant\sqrt{3}$，当 $x<0$ 时，$f(x)$ 在 $x=-1$ 处取得极大值，$f(-1)=-(1-3)e-2=2e-2>2$，因此在 $(-\infty,0)$ 上也存在满足 $f(x)\geqslant 2$ 的区间，**故 C 错误. 故选 ABD.**

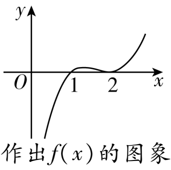
快解 对于 C，结合选项 D 分析可作出 $f(x)$ 的大致图象，如图所示，由图可知 C 选项错误.



7. -4 【**解析**】因为 $f(x)=(x-1)(x-2)(x-a)=x^3-(a+3)x^2+(3a+2)x-2a$，所以 $f'(x)=3x^2-2(a+3)x+3a+2$. 因为 $x=2$ 是 $f(x)$ 的极值点，所以 $f'(2)=12-4(a+3)+3a+2=0$，解得 $a=2$，经检验，符合题意，所以 $f(x)=(x-1)(x-2)^2$，所以 $f(0)=-4$.

一题多解 $f'(x)=(x-2)(x-a)+(x-1)(x-a)+(x-1)(x-2)$，因为 $x=2$ 是 $f(x)$ 的极值点，所以 $f'(2)=2-a=0$，得 $a=2$，经检验，符合题意，所以 $f(x)=(x-1)(x-2)^2$，所以 $f(0)=-4$.

快解 因为 $x=2$ 是 $f(x)$ 的极值点，所以由数轴标根法可得 $a=2$，作出 $f(x)$ 的图象如图所示，所以 $a=2$ 符合题意，则 $f(x)=(x-1)(x-2)^2$，所以 $f(0)=-4$.



8.【**解**】(1) 当 $a=1$ 时，$f(x)=e^x-x-1$，则 $f'(x)=e^x-1$，所以 $f'(1)=e-1$.

又 $f(1)=e-2$,所以曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程为 $y-(e-2)=(e-1)(x-1)$,即 $y=(e-1)x-1$.

(2)$f(x)=e^x-ax-a^3$,则 $f'(x)=e^x-a$,

当 $a\leqslant 0$ 时,$f'(x)=e^x-a>0$,则 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增,无极值点,所以 $a>0$.

令 $f'(x)<0$,得 $x<\ln a$,令 $f'(x)>0$,得 $x>\ln a$,

所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,\ln a)$ 上单调递减,在 $(\ln a,+\infty)$ 上单调递增,

所以 $x=\ln a$ 是 $f(x)$ 的极小值点,极小值为 $f(\ln a)=e^{\ln a}-a\ln a-a^3=a-a\ln a-a^3$,

则问题转化为解不等式 $a-a\ln a-a^3<0$.

又 $a>0$,所以不等式可化为 $a^2+\ln a-1>0$.

令 $g(a)=a^2+\ln a-1$,则 $g'(a)=2a+\dfrac{1}{a}>0$ 恒成立,

所以 $g(a)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增.又 $g(1)=0$,所以不等式 $a-a\ln a-a^3<0$ 的解集为 $(1,+\infty)$,所以 a 的取值范围是 $(1,+\infty)$.

9. (1)【**证明**】由 $f(x)=\ln(1+x)-x+\dfrac{1}{2}x^2-kx^3$,得 $f'(x)=\dfrac{1}{1+x}-1+x-3kx^2=\dfrac{x^2}{x+1}-3kx^2=x^2\left(\dfrac{1}{x+1}-3k\right)$.

当 $x>0$ 时,令 $f'(x)=0$,解得 $x_0=\dfrac{1}{3k}-1$. 因为 $0<k<\dfrac{1}{3}$,所以 $0<3k<1$,则 $x_0=\dfrac{1}{3k}-1>0$.

当 $0<x<x_0$ 时,$f'(x)>0$,$f(x)$ 单调递增;当 $x>x_0$ 时,$f'(x)<0$,$f(x)$ 单调递减,

所以 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上有唯一的极大值点 $x_0=\dfrac{1}{3k}-1$.

因为 $x=0$ 时,$f(x)=0$,当 $x\to+\infty$ 时,$f(x)\to-\infty$,且 $f(x_0)>f(0)=0$,

提示:在 $(0,x_0)$ 上 $f(x)$ 单调递增

所以 $f(x)$ 在 $(x_0,+\infty)$ 上有唯一的零点,所以 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上有唯一的零点.

(2)(i)【证明】$g(t)=f(x_1+t)-f(x_1-t)$,

且由(1)知 $x_1=x_0=\frac{1}{3k}-1$,则 $3k=\frac{1}{x_1+1}$.

则 $g'(t)=f'(x_1+t)+f'(x_1-t)$

$=(x_1+t)^2\left(\frac{1}{x_1+t+1}-3k\right)+(x_1-t)^2\left(\frac{1}{x_1-t+1}-3k\right)$

$=(x_1+t)^2\left(\frac{1}{x_1+t+1}-\frac{1}{x_1+1}\right)+(x_1-t)^2\left(\frac{1}{x_1-t+1}-\frac{1}{x_1+1}\right)$

$=(x_1+t)^2\cdot\frac{-t}{(x_1+t+1)(x_1+1)}+(x_1-t)^2\cdot\frac{t}{(x_1-t+1)(x_1+1)}$

$=\frac{-t[(x_1+t)^2(x_1-t+1)-(x_1-t)^2(x_1+t+1)]}{(x_1+t+1)(x_1-t+1)(x_1+1)}$

$=\{-t[(x_1+t)(x_1^2-t^2)+(x_1+t)^2-(x_1-t)(x_1^2-t^2)-(x_1-t)^2]\}\div[(x_1+t+1)(x_1-t+1)(x_1+1)]$

$=\frac{-t[2t(x_1^2-t^2)+4x_1t]}{(x_1+t+1)(x_1-t+1)(x_1+1)}$

$=\frac{-2t^2(x_1^2-t^2+2x_1)}{(x_1+t+1)(x_1-t+1)(x_1+1)}$,

因为 $t\in(0,x_1)$ 时,$x_1^2-t^2+2x_1>0$,$(x_1+t+1)(x_1-t+1)(x_1+1)>0$,$-2t^2<0$,所以 $g'(t)<0$,

则 $g(t)$ 在区间 $(0,x_1)$ 上单调递减.

(ii)【解】$2x_1>x_2$,证明如下:

由(i)知 $g(t)$ 在 $(0,x_1)$ 上单调递减,则 $g(x_1)<g(0)=f(x_1+0)-f(x_1-0)=0$,

所以 $g(x_1)=f(x_1+x_1)-f(x_1-x_1)=f(2x_1)-f(0)=f(2x_1)-0=f(2x_1)<0$.

因为 x_2 是 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上的零点,

所以 $f(x_2)=0$,即 $f(2x_1)<f(x_2)$.

由(1)知 $x_2\in(x_1,+\infty)$,且 $f(x)$ 在 $(x_1,+\infty)$ 上单调递减,所以 $2x_1>x_2$.

一题多解 (2)根据题意 $f'(x_1)=0, f(x_2)=0$,

所以 $x_1=x_0=\frac{1}{3k}-1$ 且 $\ln(1+x_2)-x_2+\frac{1}{2}x_2^2-kx_2^3=0$, 同时 $0<x_1<x_2$.

(i) $g'(t)=f'(x_1+t)+f'(x_1-t)$

$=(x_1+t)^2\left(\frac{1}{x_1+t+1}-3k\right)+(x_1-t)^2\left(\frac{1}{x_1-t+1}-3k\right)$

$=(x_1+t)^2\left(\frac{1}{x_1+t+1}-\frac{1}{x_1+1}\right)+(x_1-t)^2\left(\frac{1}{x_1-t+1}-\frac{1}{x_1+1}\right)$

$=(x_1+t)^2\cdot\frac{-t}{(x_1+t+1)(x_1+1)}+(x_1-t)^2\cdot\frac{t}{(x_1-t+1)(x_1+1)}$

$=\frac{t}{x_1+1}\cdot\left[\frac{(x_1-t)^2}{x_1+1-t}-\frac{(x_1+t)^2}{x_1+1+t}\right]$,

令 $\varphi(t)=\frac{(x_1+t)^2}{x_1+1+t}(-x_1<t<x_1)$, 则

$\varphi'(t)=\frac{(x_1+t)(x_1+t+2)}{(x_1+1+t)^2}$,

当 $t\in(-x_1,x_1)$ 时, $\varphi'(t)>0$, $\varphi(t)$ 单调递增,

当 $0<t<x_1$ 时, $\varphi(-t)<\varphi(t)$, 所以 $\frac{(x_1-t)^2}{x_1+1-t}<\frac{(x_1+t)^2}{x_1+1+t}$.

所以 $g'(t)<0$, 所以 $g(t)$ 在 $(0,x_1)$ 上单调递减.

(ii) $2x_1>x_2$, 证明如下: 由(i)知, 当 $t\in(0,x_1)$ 时, $g(t)$ 单调递减, 所以 $g(t)<g(0)=0$,

所以 $f(x_1+t)<f(x_1-t)$,

令 $t=x_1$, 所以 $f(2x_1)<f(0)=f(x_2)$,

又 $0<x_1<x_2$, 且 $f(x)$ 在 $(x_1,+\infty)$ 上单调递减, 所以 $2x_1>x_2$.

10. (1)【解】因为 $k=-1$, 所以 $f(x)=x-\ln(1+x)(x>-1)$,

则 $f'(x)=1-\frac{1}{1+x}=\frac{x}{1+x}(x>-1)$.

当 $x\in(-1,0)$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减，当 $x\in(0,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增.

综上，$f(x)$ 的单调递减区间为 $(-1,0)$，单调递增区间为 $(0,+\infty)$.

(2)【证明】因为 $f(x)=x+k\ln(1+x)$，

$f'(x)=1+\dfrac{k}{1+x}$，

所以曲线 $y=f(x)$ 在点 $(t,f(t))$ 处的切线方程为 $y-[t+k\ln(1+t)]=\left(1+\dfrac{k}{1+t}\right)(x-t)$，

整理得 $y=\left(1+\dfrac{k}{1+t}\right)x-\dfrac{kt}{1+t}+k\ln(1+t)$.

令 $x=0$，则 $y=\dfrac{-kt}{1+t}+k\ln(1+t)$，令 $h(t)=\dfrac{-kt}{1+t}+k\ln(1+t)$，

则 $h'(t)=\dfrac{kt}{(1+t)^2}$，又 $k\neq0$，$t>0$，则

当 $k>0$ 时，$h'(t)>0$，所以 $h(t)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，所以当 $t\in(0,+\infty)$ 时，$h(t)>h(0)=0$；

当 $k<0$ 时，$h'(t)<0$，$h(t)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，所以当 $t\in(0,+\infty)$ 时，$h(t)<h(0)=0$，

即当 $t\in(0,+\infty)$ 时，$h(t)\neq0$，所以 l 不经过点 $(0,0)$.

(3)【解】存在.

依题意，$f(x)=x+\ln(1+x)$，$A(t,t+\ln(1+t))$，$C(0,t+\ln(1+t))$，

由(2)得，当 $k=1$ 时，l 的方程为 $y=\left(1+\dfrac{1}{1+t}\right)x-\dfrac{t}{1+t}+\ln(1+t)$，所以 $B\left(0,\ln(1+t)-\dfrac{t}{1+t}\right)$.

若 $2S_{\triangle ACO}=15S_{\triangle ABO}$ 成立，则 $2\times\dfrac{1}{2}\times|OC|\times|AC|=15\times\dfrac{1}{2}\times|BO|\times|AC|$，即 $2|OC|=15|BO|$，

即 $2[t+\ln(1+t)]=15\left[\ln(1+t)-\dfrac{t}{1+t}\right]$，

整理得 $2t-13\ln(1+t)+\dfrac{15t}{1+t}=0$.

令 $g(t)=2t-13\ln(1+t)+\dfrac{15t}{1+t}, t>0$,

$g'(t)=\dfrac{2t^2-9t+4}{(1+t)^2}=\dfrac{(2t-1)(t-4)}{(1+t)^2}$,

当 $t\in\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$ 时, $g'(t)>0, g(t)$ 单调递增, 当 $t\in\left(\dfrac{1}{2},4\right)$ 时, $g'(t)<0, g(t)$ 单调递减, 当 $t\in(4,+\infty)$ 时, $g'(t)>0$, $g(t)$ 单调递增,

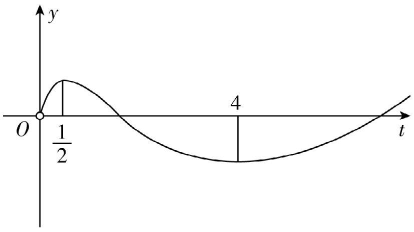
又当 $t\to 0$ 时, $g(t)\to 0$, 当 $t\to+\infty$ 时, $g(t)\to+\infty$,

$g(t)$ 的极大值为 $g\left(\dfrac{1}{2}\right)=6-13\ln\dfrac{3}{2}>0$, $g(t)$ 的极小值为 $g(4)=20-13\ln 5<0$,

作出 $g(t)$ 的大致图象如图所示.

所以 $g(t)$ 在 $(0,+\infty)$ 上有两个零点,

故有两个这样的点 A 使 $2S_{\triangle ACO}=15S_{\triangle ABO}$.



11. (1)【解】当 $b=0$ 时, $f(x)=\ln\dfrac{x}{2-x}+ax, x\in(0,2)$,

则 $f'(x)=\dfrac{2-x}{x}\cdot\left(\dfrac{x}{2-x}\right)'+a=\dfrac{2-x}{x}\cdot\dfrac{2-x-(-1)x}{(2-x)^2}+a=\dfrac{2}{x(2-x)}+a$.

$\because f'(x)\geqslant 0, \therefore a\geqslant\dfrac{2}{x(x-2)}$ 在 $(0,2)$ 上恒成立.

当 $x\in(0,2)$ 时, $x(x-2)\in[-1,0)$,

$\therefore \dfrac{2}{x(x-2)}\in(-\infty,-2]$,

$\therefore a\in[-2,+\infty)$, 即 a 的最小值为 -2.

(2)【证明】$\because f(x)=\ln\dfrac{x}{2-x}+ax+b(x-1)^3, x\in(0,2)$,

$\therefore f(x+1)=\ln\dfrac{1+x}{1-x}+ax+a+bx^3, x\in(-1,1)$.

令 $g(x)=f(x+1)-a=\ln\dfrac{1+x}{1-x}+ax+bx^3$,

$x\in(-1,1)$,则 $g(-x)=\ln\dfrac{1-x}{1+x}-ax-bx^3=-\ln\dfrac{1+x}{1-x}-ax-bx^3=-g(x)$,$\therefore g(x)$ 是定义域为$(-1,1)$的奇函数,其图象关于坐标原点 O 对称.

又$\because f(x)$的图象可由 $g(x)$ 的图象向右平移 1 个单位长度,再向上平移 a 个单位长度得到,$\therefore$ 曲线 $y=f(x)$ 是中心对称图形.

一题多解 $f(x)$的定义域为$(0,2)$,$f(1)=a$.

当 $x\in(-1,1)$时,$f(1+x)=\ln\dfrac{1+x}{1-x}+a(1+x)+bx^3$,$f(1-x)=\ln\dfrac{1-x}{1+x}+a(1-x)-bx^3$,

$\therefore f(1+x)+f(1-x)=\ln\dfrac{1+x}{1-x}+\ln\dfrac{1-x}{1+x}+2a=2a$,$\therefore$ 曲线 $y=f(x)$ 关于点$(1,a)$中心对称,即曲线 $y=f(x)$ 是中心对称图形.

(3)【解】$\because f(x)>-2$ 当且仅当 $1<x<2$,

$\therefore f(1)=-2\Rightarrow a=-2$,

$\therefore f(x)=\ln\dfrac{x}{2-x}-2x+b(x-1)^3>-2$ 对任意 $x\in(1,2)$恒成立,

$f'(x)=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{2-x}-2+3b(x-1)^2=\dfrac{2(x-1)^2}{x(2-x)}+3b(x-1)^2=(x-1)^2\cdot\left[\dfrac{2}{x(2-x)}+3b\right]$.

令 $m(x)=\dfrac{2}{x(2-x)}+3b$,$\therefore$ 必有 $m(1)=2+3b\geqslant0\Rightarrow b\geqslant-\dfrac{2}{3}$.

否则若 $b<-\dfrac{2}{3}$,则存在 $\delta(1<\delta<2)$使得当 $x\in(1,\delta)$时,$f'(x)<0$,$f(x)$ 在$(1,\delta)$上单调递减,$\therefore f(\delta)<f(1)=-2$.

当 $b\geqslant-\dfrac{2}{3}$时,对任意 $x\in(1,2)$,$f(x)\geqslant$

$\ln\frac{x}{2-x}-2x-\frac{2}{3}(x-1)^3$,

令 $h(x)=\ln\frac{x}{2-x}-2x-\frac{2}{3}(x-1)^3$,则

$h'(x)=\frac{2(x-1)^2}{x(2-x)}-2(x-1)^2=2(x-1)^2\left[\frac{1}{x(2-x)}-1\right]>0$,对任意 $x\in(1,2)$ 恒成立,

$\therefore h(x)>h(1)=-2$,符合条件.

综上可得 b 的取值范围是 $\left[-\frac{2}{3},+\infty\right)$.

12. (1)【解】$f'(x)=-5\sin x+5\sin 5x$

$=5(\sin 5x-\sin x)$

$=5[\sin(3x+2x)-\sin(3x-2x)]$

$=5\times2\cos 3x\sin 2x$

$=10\sin 2x\cos 3x$.

提示: 求 $f(x)$ 的导函数 $f'(x)$ 并化简

当 $x\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ 时, $\sin 2x\geqslant0$, $3x\in\left[0,\frac{3\pi}{4}\right]$, 当 $3x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$,

即 $x\in\left[0,\frac{\pi}{6}\right)$ 时, $\cos 3x>0$,

此时 $f'(x)\geqslant0$ 且等号不恒成立,故 $f(x)$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{6}\right)$ 上单调递增;

当 $3x\in\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{4}\right]$,

即 $x\in\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{4}\right]$ 时, $\cos 3x<0$,

此时 $f'(x)<0$,故 $f(x)$ 在 $\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{4}\right]$ 上单调递减,

$\therefore$ 当 $x\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ 时, $f(x)_{\max}=f\left(\frac{\pi}{6}\right)=5\cos\frac{\pi}{6}-\cos\frac{5\pi}{6}=6\cos\frac{\pi}{6}=3\sqrt{3}$.

提示: 根据 $f(x)$ 的单调性得到 $f(x)$ 的最大值

一题多解 $f'(x)=-5\sin x+5\sin 5x=5(\sin 5x-\sin x)=5\times 2\cos 3x\sin 2x=10\sin 2x\cos 3x.$

令 $f'(x)=0$,即 $\sin 2x=0$ 或 $\cos 3x=0$,则 $x=\dfrac{k\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$ 或 $x=\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{k\pi}{3}(k\in\mathbf{Z})$,

又 $x\in\left[0,\dfrac{\pi}{4}\right]$,$\therefore x=0$ 或 $x=\dfrac{\pi}{6}$.

提示:函数在闭区间上的最值在区间端点或极值点处取得

①当 $x=0$ 时,$f(0)=5\cos 0-\cos 0=4$;

②当 $x=\dfrac{\pi}{4}$ 时,$f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=5\cos\dfrac{\pi}{4}-\cos\dfrac{5\pi}{4}=3\sqrt{2}$;

③当 $x=\dfrac{\pi}{6}$ 时,$f\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=5\cos\dfrac{\pi}{6}-\cos\dfrac{5\pi}{6}=6\cos\dfrac{\pi}{6}=3\sqrt{3}$,又 $4<3\sqrt{2}<3\sqrt{3}$,$\therefore$ 当 $x\in\left[0,\dfrac{\pi}{4}\right]$ 时,$f(x)$ 的最大值为 $3\sqrt{3}$.

(2)【证明】$\forall a\in\mathbf{R}$,$\exists k\in\mathbf{Z}$,使得 $a=2k\pi+a'$,其中 $a'\in[-\pi,\pi)$.

当 $a'=0$ 时,$[a'-\theta,a'+\theta]=[-\theta,\theta]$,取 $y=2k\pi+\theta$,则 $y\in[a-\theta,a+\theta]$,且 $\cos y=\cos\theta$.

当 $a'\in(0,\pi)$ 时,$a'-\theta\in(-\theta,\pi-\theta)$,$a'+\theta\in(\theta,\pi+\theta)$,

设 $y_1=\min\{\pi,a'+\theta\}$,则 $y_1\in(\theta,\pi]$,

$\because g(x)=\cos x$ 在 $[\theta,y_1]$ 上单调递减,

$\therefore \cos y_1<\cos\theta$,

取 $y=2k\pi+y_1$,则 $y\in[a-\theta,a+\theta]$,

且 $\cos y=\cos y_1<\cos\theta$.

当 $a'\in[-\pi,0)$ 时,$a'-\theta\in[-\pi-\theta,-\theta)$,$a'+\theta\in[-\pi+\theta,\theta)$,记 $y_2=\max\{-\pi,a'-\theta\}$,则 $y_2\in[-\pi,-\theta)$,

$\because g(x)=\cos x$ 在 $[y_2,-\theta]$ 上单调递增,$\therefore \cos y_2<\cos(-\theta)=\cos\theta$,

取 $y=2k\pi+y_2$,则 $y\in[a-\theta,a+\theta]$,

且 $\cos y=\cos y_2<\cos\theta$.

综上，存在 $y\in[a-\theta,a+\theta]$ 使得 $\cos y\leqslant\cos\theta$.

快解 假设对任意 $y\in[a-\theta,a+\theta]$，有 $\cos y>\cos\theta$.

提示：提出与结论相反的假设

由 $\cos y>\cos\theta$，可得 $y\in(2k\pi-\theta,2k\pi+\theta)$，$k\in\mathbf{Z}$，

则 $[a-\theta,a+\theta]\subseteq(2k\pi-\theta,2k\pi+\theta)$，$k\in\mathbf{Z}$，$\therefore\begin{cases}a-\theta>2k\pi-\theta,\\a+\theta<2k\pi+\theta,\end{cases}k\in\mathbf{Z}$，

$\therefore\begin{cases}a>2k\pi,\\a<2k\pi,\end{cases}k\in\mathbf{Z}$，无解.

$\therefore$ 假设不成立.

提示：把假设当结论推矛盾

故存在 $y\in[a-\theta,a+\theta]$ 使得 $\cos y\leqslant\cos\theta$.

(3)【解】当 $\varphi=0$ 时，$y=5\cos x-\cos 5x$，

记 $f(x)=5\cos x-\cos 5x$，

$\because$ $y=f(x)$ 是以 2π 为周期的偶函数，

$\therefore$ 只需考虑 $x\in[0,\pi]$ 时即可.

由(1)知 $f'(x)=10\sin 2x\cos 3x=20(4\cos^2x-3)\cdot\cos^2x\cdot\sin x$，

当 $x\in\left[0,\dfrac{\pi}{6}\right)$，$x\in\left(\dfrac{5\pi}{6},\pi\right]$ 时，$f'(x)\geqslant0$ 且不恒为 0，$f(x)$ 单调递增，

当 $x\in\left(\dfrac{\pi}{6},\dfrac{5\pi}{6}\right)$ 时，$f'(x)\leqslant0$ 且不恒为 0，$f(x)$ 单调递减，

$\because f\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=3\sqrt{3}$，$f(\pi)=-4$，

$\therefore f(x)_{\max}=3\sqrt{3}$，$\therefore b\geqslant3\sqrt{3}$.

当 $\varphi\neq0$ 时，

由(2)知 $\exists y\in\left[\varphi-\dfrac{5\pi}{6},\varphi+\dfrac{5\pi}{6}\right]$，

使得 $\cos y\leqslant\cos\dfrac{5\pi}{6}=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，

记 $y=5x_0+\varphi$，由 $y\in\left[\varphi-\dfrac{5\pi}{6},\varphi+\dfrac{5\pi}{6}\right]$ 知 $x_0\in\left[-\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{6}\right]$，

$\therefore 5\cos x_0-\cos(5x_0+\varphi)=5\cos x_0-\cos y\geqslant 5\times\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}=3\sqrt{3}$. $\therefore b_{\min}=3\sqrt{3}$.

一题多解 (3)由余弦型函数周期性可令 $\varphi\in[0,2\pi)$.

①当 $\varphi=0$ 时,$5\cos x-\cos(5x+\varphi)=5\cos x-\cos 5x$,

由(1)得,$f(x)=5\cos x-\cos 5x,x\in\mathbf{R}$,

$f'(x)=10\sin 2x\cos 3x$,

令 $f'(x)=0$,得 $x=\frac{k\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$ 或 $x=\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{3}(k\in\mathbf{Z})$.

当 $x=\frac{k\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$ 时,$f\left(\frac{k\pi}{2}\right)=5\cos\frac{k\pi}{2}-\cos\frac{5k\pi}{2}=5\cos\frac{k\pi}{2}-\cos\left(2k\pi+\frac{k\pi}{2}\right)=4\cos\frac{k\pi}{2},k\in\mathbf{Z}$,

$\because \cos\frac{k\pi}{2}\in\{-1,0,1\}$,$\therefore f\left(\frac{k\pi}{2}\right)_{\max}=4$;

当 $x=\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{3}(k\in\mathbf{Z})$ 时,$f\left(\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{3}\right)$

$=5\cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{3}\right)-\cos\left(\frac{5\pi}{6}+\frac{5k\pi}{3}\right)$

$=5\cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{3}\right)-\cos\left(\frac{5\pi}{6}-\frac{k\pi}{3}\right)=6\cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{3}\right),k\in\mathbf{Z}$,

当 $k=0,1,2,3,4,5$ 时,分别有 $f\left(\frac{\pi}{6}\right)=3\sqrt{3}$,$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$,

$f\left(\frac{5\pi}{6}\right)=-3\sqrt{3}$,$f\left(\frac{7\pi}{6}\right)=-3\sqrt{3}$,

$f\left(\frac{3\pi}{2}\right)=0$,$f\left(\frac{11\pi}{6}\right)=3\sqrt{3}$,

$\therefore f\left(\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{3}\right)_{\max}=3\sqrt{3}>4$.

故当 $\varphi=0$ 时,$f(x)_{\max}=3\sqrt{3}$,此时 $b\geqslant 3\sqrt{3}$.

②当 $\varphi\in(0,2\pi)$ 时,

令 $g(x)=5\cos x-\cos(5x+\varphi)$,取 $x=\frac{\pi-\varphi}{6}$,则 $x\in\left(-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}\right)$,

则 $g(x)=5\cos\frac{\pi-\varphi}{6}-\cos\frac{5\pi+\varphi}{6}=6\cos\frac{\pi-\varphi}{6}=6\cos x>6\cos\frac{\pi}{6}=3\sqrt{3}$，故 $b>3\sqrt{3}$ $\Big($另解：由(2)得，取 $\theta=\frac{5\pi}{6}$，令 $a=\varphi$，则存在 $y\in[\varphi-\theta,\varphi+\theta]$ 使得 $\cos y\leqslant\cos\theta$. 设 $x=\frac{y-\varphi}{5}$，$\therefore |x|\leqslant\frac{\theta}{5}=\frac{\pi}{6}$，$\therefore \cos x\geqslant\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\therefore 5\cos x-\cos(5x+\varphi)=5\cos x-\cos y\geqslant5\times\frac{\sqrt{3}}{2}-\cos\frac{5\pi}{6}=3\sqrt{3}\Big)$.

综上所述，b 的最小值为 $3\sqrt{3}$.

素养上分

1. ACD 【解析】对于 A，由函数 $y=e^x-e-1$，可得 $x=\ln(y+e+1)$，所以函数 $y=e^x-e-1$ 与函数 $y=\ln(x+e+1)$ 互为反函数，所以封闭曲线 τ 关于直线 $y=x$ 对称，**故 A 正确**；

对于 B，令 $e^x-e-1=\ln(x+e+1)$，则 $e^x+x=x+e+1+\ln(x+e+1)=\ln(x+e+1)+e^{\ln(x+e+1)}$，令 $f(x)=x+e^x$，则 $f'(x)=1+e^x>0$，所以 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增，又 $f(x)=f(\ln(x+e+1))$，所以 $x=\ln(x+e+1)$，即 $e^x-x-e-1=0$，令 $g(x)=e^x-x-e-1$，则 $g'(x)=e^x-1$，易知 $x\in(-\infty,0)$ 时，$g'(x)<0$，$g(x)$ 单调递减，$x\in(0,+\infty)$ 时，$g'(x)>0$，$g(x)$ 单调递增，又 $g(1)=e-1-e-1=-2<0$，$g(2)=e^2-2-e-1=e^2-e-3>0$，所以 $x_0\in(1,2)$，**故 B 错误**；

对于 C，设 $M(x_M,y_M)$，由 B 知，当 $x\in(-\infty,0)$ 时，$g(x)$ 单调递减，又 $g(-3)=\frac{1}{e^3}+2-e<0$，$g(-4)=\frac{1}{e^4}+3-$

$e>0$，所以 $x_M\in(-4,-3)$，所以封闭曲线 τ 上的点的横坐标取值范围为 $[x_M,x_0]$，其中 $x_M\in(-4,-3)$，$x_0\in(1,2)$，由 $y=e^x-e-1$，得 $y'=e^x$，令 $e^x=1$，得 $x=0$，所以曲线 $y=e^x-e-1$ 上斜率为 1 的切线对应的切点坐标为 $(0,-e)$，即封闭曲线 τ 上的点到直线 $y=x$ 距离的最大值为点 $(0,-e)$ 到直线 $y=x$ 的距离，

提示：根据曲线的对称性得

所以所求距离的最大值为 $\dfrac{|e|}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}e$，

故 C 正确；

对于 D，由 $y=\ln(x+e+1)$ 得，$y'=\dfrac{1}{x+e+1}$，令 $\dfrac{1}{x+e+1}=1$，得 $x=-e$，所以曲线 $y=\ln(x+e+1)$ 上斜率为 1 的切线对应的切点为 $(-e,0)$，结合 C 选项可知封闭曲线 τ 上存在互异的两点 $(-e,0)$ 和 $(0,-e)$，分别过这两点作曲线 τ 的切线，斜率相等，**故 D 正确. 故选 ACD.**

2. $[-2e^3,0]$

思路导引 本题关键点在于“45°旋转函数”这一条件的等价转换，由题意分析可知，将函数 $f(x)=\dfrac{a\ln x}{x}$ 的图象绕着坐标原点逆时针旋转 45°后，不存在与 x 轴垂直的直线和旋转后的函数图象有 2 个或 2 个以上的交点，即不存在直线 $y=x+b\ (b\in\mathbf{R})$ 与函数 $f(x)=\dfrac{a\ln x}{x}$ 的图象有 2 个或 2 个以上的交点，设 $g(x)=\dfrac{a\ln x}{x}-x$，利用导数进一步求解.

【解析】若函数 $f(x)=\frac{a\ln x}{x}$ 是 45°旋转函数,则将函数 $f(x)=\frac{a\ln x}{x}$ 的图象绕着坐标原点逆时针旋转 45°后,不存在与 x 轴垂直的直线和旋转后的函数图象有 2 个或 2 个以上的交点,

故不存在直线 $y=x+b(b\in\mathbf{R})$ 与函数 $f(x)=\frac{a\ln x}{x}$ 的图象有 2 个或 2 个以上的交点,即对任意的 $b\in\mathbf{R}$,方程 $x+b=\frac{a\ln x}{x}$ 至多有一个解,即 $b=\frac{a\ln x}{x}-x$ 至多有一个解.

令 $g(x)=\frac{a\ln x}{x}-x(x>0)$,故 $g(x)=b$ 至多有一个解,且 $g'(x)=\frac{a(1-\ln x)}{x^2}-1$,

若 $a>0$,则 $x\to0$ 时,$g(x)\to-\infty$,$x\to+\infty$ 时,$g(x)\to-\infty$,

且 $g(x)$ 先增后减,故与 $g(x)=b$ 至多有一个解矛盾,舍去;

若 $a=0$,则 $g(x)=\frac{a\ln x}{x}-x=-x$,

此时 $g(x)=b$ 在 $(0,+\infty)$ 上至多有一个解,符合要求;

若 $a<0$,则 $x\to0$ 时,$g(x)\to+\infty$,$x\to+\infty$ 时,$g(x)\to-\infty$,

因为 $g(x)=b$ 至多有一个解,故 $g(x)$ 为单调递减函数,

故 $g'(x)\leqslant0$ 恒成立,即 $\frac{1}{a}\leqslant\frac{1-\ln x}{x^2}$ 对任意的 $x>0$ 恒成立.

令 $h(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$,其中 $x>0$,则 $h'(x)=\frac{2\ln x-3}{x^3}$,

由 $h'(x)<0$,可得 $0<x<e^{\frac{3}{2}}$,由 $h'(x)>0$,可得 $x>e^{\frac{3}{2}}$,

所以函数 $h(x)$ 的单调递减区间为 $(0,e^{\frac{3}{2}})$，单调递增区间为 $(e^{\frac{3}{2}},+\infty)$，

$h(x)_{\min}=h(e^{\frac{3}{2}})=-\frac{1}{2e^3}$.

所以 $\frac{1}{a}\leqslant h(x)_{\min}=-\frac{1}{2e^3}$，解得 $-2e^3\leqslant a<0$.

综上所述，实数 a 的取值范围是 $[-2e^3,0]$.

3. D 【解析】充分性：$g'(x)=f'(x)(x^2-x+1)+f(x)(2x-1)$，

因为 $f(0)=0$，所以 $g'(0)=f'(0)-f(0)=f'(0)$，

因此 $g(x)$ 在 $x=0$ 处是否可导，还需要看 $f(x)$ 在 $x=0$ 处是否可导，因此不具备充分性；

必要性：$g'(x)=f'(x)(x^2-x+1)+f(x)(2x-1)$，$g'(0)=f'(0)-f(0)$，

$g(x)$ 在 $x=0$ 处可导只能代表 $f'(0)-f(0)$ 有意义，不能得出 $f(0)=0$，因此不具备必要性. **故选 D.**

4. AD 【解析】由函数 $f(x)=\frac{x-1}{e^x}$，可得 $f'(x)=\frac{2-x}{e^x}$，

当 $x<2$ 时，$f'(x)>0$，当 $x>2$ 时，$f'(x)<0$，所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,2)$ 上单调递增，在 $(2,+\infty)$ 上单调递减.

当 $x=2$ 时，函数 $f(x)$ 取得极大值，极大值为 $f(2)=\frac{1}{e^2}$，且当 $x\to+\infty$，$f(x)\to0$，当 $x<1$ 时，$f(x)<0$，

所以若 $f(x)=a$ 有两个解，则 $0<a<\frac{1}{e^2}$，**故 A 正确.**

当 $m\geqslant-\frac{1}{e^2}$ 时，方程 $f(x)+m=0$ 恒有根，即 $|f(x)+m|$ 有最小值 0，

当 $m<-\frac{1}{e^2}$时，$[f(x)+m]_{\max}=m+\frac{1}{e^2}<0$，所以$|f(x)+m|_{\min}=-m-\frac{1}{e^2}$，

即 $m\in\mathbf{R}$ 时，$|f(x)+m|$恒有最小值，**故 B，C 不正确.**

设 $g(x)=f(4-x)=\frac{3-x}{e^{4-x}}$，

令 $F(x)=f(x)-g(x)=\frac{x-1}{e^x}-\frac{3-x}{e^{4-x}}$，

可得 $F'(x)=\frac{2-x}{e^x}-\frac{2-x}{e^{4-x}}=\frac{(2-x)(e^4-e^{2x})}{e^{x+4}}$，

当 $x>2$ 时，$2-x<0$ 且 $2x>4$，

所以 $e^4-e^{2x}<0$，可得 $F'(x)>0$，

所以 $F(x)$在$(2,+\infty)$上单调递增，

所以 $F(x)>F(2)=0$，所以当 $x\in(2,+\infty)$时，$f(x)>g(x)$.

$x>2$ 时，由 $x-1>0$，$e^x>0$，得 $f(x)>0$，

又因为 $f(1)=0$，$f(x)$在$[1,2)$上单调递增，

且 $f(x)=a$ 有两个解 x_1，x_2，所以 $f(x_1)=f(x_2)=a$.

不妨令 $x_1<x_2$，则 $1<x_1<2<x_2$，$f(x_2)>g(x_2)$，因为 $g(x_2)=f(4-x_2)$，所以 $f(x_2)>f(4-x_2)$，

又因为 $f(x_1)=f(x_2)$，所以 $f(x_1)>f(4-x_2)$，

因为 $x_2>2$，所以 $4-x_2<2$，又 $x_1<2$，且函数 $f(x)$在$(-\infty,2)$上单调递增，

所以 $x_1>4-x_2$，所以 $x_1+x_2>4$，**故 D 正确. 故选 AD.**

5. $(3,+\infty)$ 【解析】由 $x^3e^y=y^3e^x$，得 $\frac{x^3}{e^x}=\frac{y^3}{e^y}$，

令 $f(x)=\frac{x^3}{e^x}(x\geqslant0)$，$f'(x)=\frac{x^2(3-x)}{e^x}$，

令 $f'(x)=0$，解得 $x=0$ 或 $x=3$，

x	$(0,3)$	3	$(3,+\infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	↗	极大值	↘

当 $x\in[0,3]$ 时，$f(x)\in\left[0,\frac{27}{e^3}\right]$；

当 $x\in(3,+\infty)$ 时，$f(x)\in\left(0,\frac{27}{e^3}\right)$.

故 $y\in(3,+\infty)$.

6.【解】存在，最大值为 3，最小值为 e.

由题意知 $5a-3c\leqslant b\leqslant 4a-c$，

$c\ln b\geqslant a+c\ln c$，

$a>0,b>0,c>0$，

则$\begin{cases}5-3\dfrac{c}{a}\leqslant\dfrac{b}{a}\leqslant 4-\dfrac{c}{a},\\ \ln\dfrac{b}{c}\geqslant\dfrac{a}{c}.\end{cases}$

令 $x=\dfrac{b}{a}$，$y=\dfrac{c}{a}$，

则 $5-3y\leqslant x\leqslant 4-y$，

且 $\ln\dfrac{x}{y}\geqslant\dfrac{1}{y}$，$x>0,y>0$，

$\therefore \dfrac{x}{y}\geqslant e^{\frac{1}{y}}$，$\therefore x\geqslant ye^{\frac{1}{y}}$.

令 $t=\dfrac{1}{y}$，

则 $x\geqslant\dfrac{e^t}{t}$，令 $u(t)=\dfrac{e^t}{t}$，

则 $u'(t)=\dfrac{e^t(t-1)}{t^2}$.

当 $t>1$ 时，$u'(t)>0$，

当 $0<t<1$ 时，$u'(t)<0$，

$\therefore u(t)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，

在 $(0,1)$ 上单调递减，

$\therefore u(t)_{\min}=e$，

此时 $t=y=1$，可得$\begin{cases}2\leqslant x\leqslant 3,\\ x\geqslant e,\end{cases}$

故 $x\in[e,3]$，$\therefore\dfrac{b}{a}$ 的最大值和最小值

存在，且最大值为 3，最小值为 e.

第二章 全章上分

1. D 【解析】由 $f(x)=2xf'(1)+x^2$,可得 $f'(x)=2f'(1)+2x$,则 $f'(1)=2f'(1)+2$,解得 $f'(1)=-2$. **故选 D.**

2. D 【解析】由题图知,当 $x\in(-\infty,x_1)$,$(x_4,+\infty)$ 时,$f'(x)<0$,当 $x\in(x_1,x_4)$时,$f'(x)\geqslant 0$ 且仅有 $f'(x_3)=0$,所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,x_1)$,$(x_4,+\infty)$ 上单调递减,在 (x_1,x_4) 上单调递增,所以 $f(x)$ 的极大值点为 x_4. **故选 D.**

3. B 【解析】$V'(t)=0.6t+0.2$,$t=5$ s 时加速度大小为 $V'(5)=0.6\times5+0.2=3.2$ m/s^2. **故选 B.**

4. D 【解析】由题知 $f'(x)=2e^{2x}-3$,令 $f'(x)=0$,得 $x=\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}$,

当 $x\in\left(-\infty,\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}\right)$ 时,$f'(x)<0$,

$f(x)$ 在 $\left(-\infty,\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}\right)$ 上单调递减;

当 $x\in\left(\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2},+\infty\right)$ 时,$f'(x)>0$,

$f(x)$ 在 $\left(\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2},+\infty\right)$ 上单调递增,

于是 $f(x)$ 有极小值 $f\left(\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}\right)=\frac{3}{2}\left(1-\ln\frac{3}{2}\right)$. **故选 D.**

5. B 【解析】根据题意,令 $g(x)=\frac{f(x)}{x^2}$ $(x<0)$,则 $g'(x)=\frac{xf'(x)-2f(x)}{x^3}<0$,

所以 $g(x)=\frac{f(x)}{x^2}$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递减. 因为 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,0)$,所以 $x+2\ 025<0$,即 $x<-2\ 025$,所以所求不等式等价于 $\frac{f(x+2\ 025)}{(x+2\ 025)^2}<-1$,

即 $g(x+2\ 025)=\frac{f(x+2\ 025)}{(x+2\ 025)^2}<-1=$

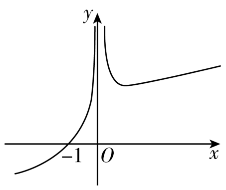
$g(-1)$，得 $x+2\ 025>-1$，解得 $x\in(-2\ 026,-2\ 025)$. **故选 B.**

6. C 【解析】当 $x<0$ 时，$f'(x)=-\frac{1}{x}>0$ 恒成立，故 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递增. 当 $x>0$ 时，$f'(x)=\frac{x-1}{x^2}$，

当 $0<x<1$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减，

当 $x>1$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，

所以当 $x=1$ 时，$f(x)$ 有极小值为 $f(1)=2$，函数 $f(x)$ 的大致图象如图.



要使函数 $g(x)=f(x)+2a-1$ 有三个零点，则 $f(1)+2a-1<0$，即 $2+2a-1<0$，解得 $a<-\frac{1}{2}$，**故选 C.**

7. ACD 【解析】对函数 $f(x)$ 求导得 $f'(x)=3x^2+2ax+b$，则 $f'(1)=3+2a+b=0$，$f(1)=1+a+b+2=0$，解得 $a=0$，$b=-3$，此时 $f'(x)=3x^2-3=3(x-1)\cdot(x+1)$，由于当 $x\in(-\infty,-1)$，$(1,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，$x\in(-1,1)$ 时，$f'(x)<0$，所以满足 $f(x)$ 在 $x=1$ 处取得极小值，则 $a-b=3$，**故 A 正确；**

因为 $f(x)$ 在 $(-\infty,-1)$，$(1,+\infty)$ 上单调递增，$f(x)$ 在 $(-1,1)$ 上单调递减，所以当 $0<x<1$ 时，$0<x^2<x<1$，则 $f(x^2)>f(x)$，

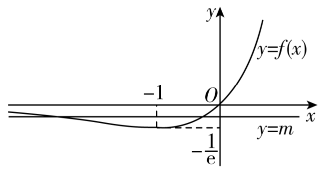
当 $x>1$ 时，$x^2>x>1$，则 $f(x^2)>f(x)$，**故 B 错误，C 正确；**

设切点为 (m,m^3-3m+2)，则切线方程为 $y-(m^3-3m+2)=(3m^2-3)(x-m)$，

又点$(0,2)$在切线上,所以 $2-(m^3-3m+2)=(3m^2-3)(-m)$,整理得 $2-m^3+3m-2=-3m^3+3m$,即 $2m^3=0$,解得 $m=0$,所以过点$(0,2)$且与曲线 $y=f(x)$相切的直线有且只有一条,**故 D 正确. 故选 ACD.**

8. AD 【解析】对于 A,因为 $f(x)=xe^x$,所以 $f'(x)=(x+1)e^x$,当 $x<-1$ 时,$f'(x)<0$,当 $x>-1$ 时,$f'(x)>0$,且 $f'(-1)=0$,所以 $x=-1$ 是 $f(x)$的极小值点,$f(-1)=-e^{-1}=-\dfrac{1}{e}$,**故 A 正确.**

对于 B,由 A 知,$f(x)=xe^x$ 在区间$(-\infty,-1)$上单调递减,在区间$(-1,+\infty)$上单调递增,又当 $x\to-\infty$ 时,$f(x)\to0$,当 $x\to+\infty$ 时,$f(x)\to+\infty$,故 $f(x)=xe^x$ 的大致图象如图.



令 $y=m$,结合图象可知,当$-\dfrac{1}{e}<m<0$ 时,直线 $y=m$ 与 $f(x)=xe^x$ 的图象有两个交点,当 $m\geqslant0$ 时,直线 $y=m$ 与 $f(x)=xe^x$ 的图象只有一个交点,**故 B 错误.**

对于 C,$\ln\sqrt{2}=\dfrac{\ln 2}{2}$,$\dfrac{4-\ln 4}{e^2}=\dfrac{2(2-\ln 2)}{e^2}=\dfrac{\ln\dfrac{e^2}{2}}{\dfrac{e^2}{2}}$,构造函数 $g(x)=\dfrac{\ln x}{x}(x>0)$,则 $g'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$,当 $x\in(0,e)$时,$g'(x)>0$,当 $x\in(e,+\infty)$时,$g'(x)<0$,所以 $g(x)=\dfrac{\ln x}{x}$在$(0,e)$上单调递增,在$(e,+\infty)$上单调递减. 由

$e<\frac{e^2}{2}<4$，可得 $g(4)<g\left(\frac{e^2}{2}\right)$，又 $g(2)=g(4)>0$，所以 $g(2)<g\left(\frac{e^2}{2}\right)$，又由 $f(x)$ 在 $(-1,+\infty)$ 上单调递增，可得 $f(g(2))<f\left(g\left(\frac{e^2}{2}\right)\right)$，**故 C 错误**

$\left(\right.$**另解：**对于选项 C 也可先估算出 $0<\ln\sqrt{2}<\frac{4-\ln 4}{e^2}$，再结合 $f(x)$ 的单调性判断出 C 错误$\left.\right)$.

对于 D，设点 $P(x_0,y_0)$，当曲线在 $P(x_0,y_0)$ 处的切线与直线 $y=x-2$ 平行时，点 $P(x_0,y_0)$ 到直线 $y=x-2$ 的距离最小，则 $f'(x_0)=(x_0+1)e^{x_0}=1$. 令 $h(x)=(x+1)e^x-1$，则 $h'(x)=(x+2)e^x$，当 $x<-2$ 时，$h'(x)<0$，当 $x>-2$ 时，$h'(x)>0$，所以 $h(x)=(x+1)e^x-1$ 在区间 $(-\infty,-2)$ 上单调递减，在区间 $(-2,+\infty)$ 上单调递增，当 $x\to-\infty$，$h(x)\to0^-$，当 $x\to+\infty$，$h(x)\to+\infty$，所以 $x<-2$ 时，$h(x)<0$，又 $h(0)=e^0-1=0$，所以 $x_0=0$，又 $f(0)=0$，得 $P(0,0)$，所以 $P(0,0)$ 到直线 $y=x-2$ 的距离最小，最小值为 $\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$，**故 D 正确. 故选 AD.**

9. $y=\pm x$ 【**解析**】当 $x>0$ 时，$f(x)=\ln x+1$，设切点坐标为 $(x_0,\ln x_0+1)$，则切线斜率 $k=f'(x_0)=\frac{1}{x_0}$，那么切线方程为 $y-(\ln x_0+1)=\frac{1}{x_0}(x-x_0)$，将 $(0,0)$ 代入方程中解得 $x_0=1$，故切线方程为 $y=x$.

由于 $f(x)=\ln|x|+1$ 为偶函数，其图象关于 y 轴对称，故当 $x<0$ 时，切线方程为 $y=-x$.

综上可知,所求切线方程为 $y=x$ 和 $y=-x$.

10. $2e-1$ 【解析】$\because$ $e^{x}=y\ln x+y\ln y$,

$\therefore$ $e^{x}=y\ln xy$, 即 $xe^{x}=xy\ln xy=e^{\ln xy}\ln xy$.

设 $f(x)=xe^{x}$, 则 $f(x)=f(\ln xy)$, 且 $f'(x)=e^{x}(x+1)$, 当 $x>-1$ 时, $f'(x)>0$, $\therefore f(x)$ 在 $(-1,+\infty)$ 上单调递增,

由题可知 x,y 为正实数, $\therefore$ $e^{x}=y\ln xy>e^{0}=1$, 即 $\ln xy>\dfrac{1}{y}>0$,

$\therefore f(x)=f(\ln xy)$ 等价于 $x=\ln xy$, 即 $y=\dfrac{e^{x}}{x}$, $x>0$.

又 $y'=\dfrac{e^{x}(x-1)}{x^{2}}$, 当 $0<x<1$ 时, $y=\dfrac{e^{x}}{x}$ 单调递减, 当 $x>1$ 时, $y=\dfrac{e^{x}}{x}$ 单调递增,

$\therefore$ $y=\dfrac{e^{x}}{x}\geqslant e$.

$\dfrac{2e^{x}}{x}-\ln y=2y-\ln y$, $y\geqslant e$,

令 $g(y)=2y-\ln y$, $y\geqslant e$, 则 $g'(y)=2-\dfrac{1}{y}=\dfrac{2y-1}{y}>0$, 即 $g(y)$ 在 $[e,+\infty)$ 上单调递增,

$\therefore$ $g(y)_{\min}=g(e)=2e-1$, $\therefore$ $2y-\ln y\geqslant 2e-1$, 即 $\dfrac{2e^{x}}{x}-\ln y$ 的最小值为 $2e-1$.

11. 【解】(1) $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$,

对 $f(x)$ 求导得 $f'(x)=\dfrac{x-a}{x}$,

因为 $f'(1)=0$, 所以 $a=1$.

(2) 由 (1) 知, $f'(x)=\dfrac{x-1}{x}$ $(x\in(0,+\infty))$,

当 $x\in(0,1)$ 时, $f'(x)<0$, $f(x)$ 单调递减, 当 $x\in(1,+\infty)$ 时, $f'(x)>0$, $f(x)$ 单调递增,

所以在区间 $\left[\dfrac{1}{e},e\right]$ 上, $f(x)$ 在 $x=1$ 处

取得极小值，即最小值$f(1)=0$，

又$f\left(\frac{1}{e}\right)=\frac{1}{e}<\frac{1}{2}$，$f(e)=e-2>\frac{1}{2}$，

所以$f(x)$在区间$\left[\frac{1}{e},e\right]$上的值域为$[0,e-2]$.

12.【解】（1）当$a=2$时，$f(x)=e^x-2x$，

$\therefore f'(x)=e^x-2$，$f(0)=e^0-2\times0=1$，

$\therefore f'(0)=1-2=-1$，

$\therefore$ 所求切线方程为$y-1=-(x-0)$，

即$y=-x+1$.

（2）函数$f(x)=e^x-ax$的定义域为$\mathbf{R}$，

$f'(x)=e^x-a$.

当$a\leqslant0$时，$f'(x)=e^x-a>0$恒成立，

$f(x)$在$\mathbf{R}$上单调递增；

当$a>0$时，由$f'(x)>0$，解得$x>\ln a$，由$f'(x)<0$，解得$x<\ln a$，$\therefore f(x)$在$(-\infty,\ln a)$上单调递减，在$(\ln a,+\infty)$上单调递增.

综上，当$a\leqslant0$时，$f(x)$在$\mathbf{R}$上单调递增；当$a>0$时，$f(x)$在$(-\infty,\ln a)$上单调递减，在$(\ln a,+\infty)$上单调递增.

（3）要使$f(x)\geqslant1$恒成立，

只需$f(x)_{\min}\geqslant1$成立.

由（2）可知，当$a\leqslant0$时，$f(x)$在$\mathbf{R}$上单调递增，且$f(0)=1$，

$\therefore$ 当$x<0$时，$f(x)<1$，不合题意，舍去.

当$a>0$时，$f(x)$在$(-\infty,\ln a)$上单调递减，在$(\ln a,+\infty)$上单调递增，

$\therefore f(x)_{\min}=f(\ln a)=a-a\ln a$，

故只需$f(x)_{\min}=a-a\ln a\geqslant1$，即$a-a\ln a-1\geqslant0$在$a>0$时恒成立.

记$g(a)=a-a\ln a-1$，$a>0$，则$g'(a)=1-\ln a-1=-\ln a$，

$\because$ 当$0<a<1$时，$g'(a)>0$，$g(a)$单调递增，当$a>1$时，$g'(a)<0$，$g(a)$单调递减，

$\therefore g(a)_{\max}=g(1)=1-\ln 1-1=0$,

$\therefore g(a)\leqslant 0$,

$\therefore$ 只有 $a=1$ 符合题意.

综上所述,实数 a 的取值范围为 $\{1\}$.

13. (1)【解】由题意得 $T_1(\cos x)=\cos x$,

$\therefore T_1(x)=x, x\in[-1,1]$,

$T_2(\cos x)=\cos 2x=2\cos^2x-1$,

$\therefore T_2(x)=2x^2-1, x\in[-1,1]$,

$\therefore f(x)=\dfrac{1}{2}T_1(x)\cdot[T_2(x)+1]\ln x=\dfrac{1}{2}x[(2x^2-1)+1]\ln x=x^3\ln x$,

$\therefore f(x)=x^3\ln x$,且 $f(x)$ 的定义域为 $(0,1]$.

(2)【证明】要证 $\dfrac{f(x)}{x^2}<e^x+\cos x-2$,

即证 $x\ln x<e^x+\cos x-2, x\in(0,1]$,

当 $x\in(0,1]$ 时,$x\ln x\leqslant 0$.

令 $m(x)=e^x+\cos x-2, 0<x\leqslant 1$,

$\because m'(x)=e^x-\sin x>0$,

$\therefore m(x)$ 在 $(0,1]$ 上单调递增,

$\therefore m(x)>m(0)=1+1-2=0$,

$\therefore x\ln x<e^x+\cos x-2$,

即 $\dfrac{f(x)}{x^2}<e^x+\cos x-2$.

(3)【证明】$\because x_1, x_2(0<x_1<x_2)$ 是 $y=f(x)-a$ 的两个零点,

$\therefore x_1^3\ln x_1-a=0, x_2^3\ln x_2-a=0$,

则 $\ln x_1=\dfrac{a}{x_1^3}, \ln x_2=\dfrac{a}{x_2^3}$,

$\therefore a=\dfrac{\ln x_2-\ln x_1}{\dfrac{1}{x_2^3}-\dfrac{1}{x_1^3}}$.

要证 $a\left(\dfrac{2}{x_1^3}+\dfrac{1}{x_2^3}\right)<-1$,只需证 $\left(\dfrac{2}{x_1^3}+\dfrac{1}{x_2^3}\right)\dfrac{\ln x_2-\ln x_1}{\dfrac{1}{x_2^3}-\dfrac{1}{x_1^3}}<-1$.

$\because 0<x_1<x_2$,且 $y=\ln x$ 为增函数,

$\therefore \ln x_2-\ln x_1>0$,

$\because 0<x_1<x_2$，且 $y=\dfrac{1}{x^3}$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，$\therefore \dfrac{1}{x_2^3}-\dfrac{1}{x_1^3}<0$，

$\therefore \left(\dfrac{2}{x_1^3}+\dfrac{1}{x_2^3}\right)\dfrac{\ln x_2-\ln x_1}{\dfrac{1}{x_2^3}-\dfrac{1}{x_1^3}}<0$，

$\therefore$ 即证 $\dfrac{\dfrac{1}{x_2^3}-\dfrac{1}{x_1^3}}{\left(\dfrac{2}{x_1^3}+\dfrac{1}{x_2^3}\right)\cdot(\ln x_2-\ln x_1)}>-1$，即证 $\dfrac{\dfrac{1}{x_2^3}-\dfrac{1}{x_1^3}}{\dfrac{2}{x_1^3}+\dfrac{1}{x_2^3}}>-(\ln x_2-\ln x_1)$，

即证 $\dfrac{\dfrac{1}{x_2^3}-\dfrac{1}{x_1^3}}{\dfrac{2}{x_1^3}+\dfrac{1}{x_2^3}}+(\ln x_2-\ln x_1)>0$，

即证 $\ln\dfrac{x_2}{x_1}+\dfrac{\dfrac{1}{x_2^3}-\dfrac{1}{x_1^3}}{\dfrac{2}{x_1^3}+\dfrac{1}{x_2^3}}>0$，

即证 $\ln\dfrac{x_2}{x_1}+\dfrac{1-\left(\dfrac{x_2}{x_1}\right)^3}{2\left(\dfrac{x_2}{x_1}\right)^3+1}>0.$

令 $m=\dfrac{x_2}{x_1}(m>1)$，则只需证 $\ln m+\dfrac{1-m^3}{2m^3+1}>0.$

设 $g(m)=\ln m+\dfrac{1-m^3}{2m^3+1}(m>1)$，

则 $g'(m)=\dfrac{1}{m}-\dfrac{9m^2}{(2m^3+1)^2}=\dfrac{4m^6-5m^3+1}{m(2m^3+1)^2}=\dfrac{(4m^3-1)(m^3-1)}{m(2m^3+1)^2}>0$，

$\therefore g(m)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，则 $g(m)>g(1)=0$，

$\therefore \ln m+\dfrac{1-m^3}{2m^3+1}>0$ 恒成立，

$\therefore a\left(\dfrac{2}{x_1^3}+\dfrac{1}{x_2^3}\right)<-1.$